中国科学技术大学

本科毕业论文

七维流形上的 G_2-结构

作者姓名： 陈子安

学　　号： PB19000030

专　　业： 数学与应用数学

导师姓名： 殷浩

完成时间： 2023 年 5 月 12 日

摘　要

本文旨在研究与讨论七维流形上几个经典的性质, 并且构造一个样例流形. 大体上, 本文所涉及的内容主要为微分几何与少量的 Lie 群表示论. 具体而言, 先以大量的几何与代数知识作为铺排, 通过具体回忆对 K3 曲面的 Kummer 构造流程, 仿照与推广此法构筑所需的七维紧致流形; 辅以提前备好的分析工具与精准的技巧, 证明该七维流形的 Holonomy 群正为 G_2 群.

本文的核心研究对象是流形上的结构, 尤着眼于较为罕见的例外群结构. 基于对一般对称群结构的了解, 以及特殊例外群的表示论信息的积累, 以一般致特殊, 在扩大数学视野的同时深化研究内容. 详细来说, 本文着墨于 G_2 的表示理论与推广的 Kummer 构造的分析, 并最终运用于目标流形的构造.

本文的形式似读书报告与综述的有机结合. 既有对具体文章的深入研读与细致讨论, 汲取对具体问题的技巧与经验; 又有对近七十年来英法美诸国相关数学资料的搜集, 整理历史发展的脉络并对知识进行存优去劣的梳理. 两部分在文中皆起到必要作用, 相互交织之下完成对文本的叙述. 宽泛来说, 除去第一章的介绍性内容, 第二章是综述的体现, 而第三四章则是对 Joyce 论文的具体研读与整理思考.

关键词：微分几何、Lie 群表示论、Kummer 构造、例外群

ABSTRACT

This article aims to study and discuss several classical properties of 7-manifolds and construct an exemplary manifold. Broadly speaking, the content covered in this article mainly revolves around differential geometry and a small amount of Lie group representation theory. Specifically, it starts with a substantial amount of geometric and algebraic knowledge as a foundation, recalling in detail the Kummer construction process for the K3 surface and using it as a template to construct the required compact 7-manifold. Accompanied by prepared analytical tools and precise techniques, the article aims to prove that the Holonomy group of this 7-manifold is precisely G_2.

The core focus of this article is the structure on manifolds, with particular emphasis on the rare exceptional group structure. Based on an understanding of general symmetric group structures and the accumulated knowledge of representation theory for specific exceptional groups, the article aims from the general to the specific, expanding the mathematical horizon while deepening the research content. More specifically, the article delves into the representation theory of G_2 and the analysis of the extended Kummer construction, ultimately applying them to the construction of the final manifold.

The form of this article is an organic combination of a book report and a survey. It involves in-depth study and meticulous discussion of specific articles, drawing upon techniques and experiences related to specific problems. Additionally, it involves collecting mathematical materials from English, French, and American literature over the past seventy years, sorting out the development of the history and optimizing the knowledge. Both parts play necessary roles in the article and intertwine to complete the narration of the text. In broad terms, aside from the introductory content in the first chapter, the second chapter serves as a manifestation of the survey, while the third and fourth chapters focus on the specific study and organization of Joyce's paper.

Key Words: differential geometry, representation theory of Lie group, Kummer's construction, exceptional groups

目　录

符 号 说 明

$\mathbb{R}$ 实数, 也表实直线

$\mathbb{C}$ 复数, 也表复平面

$\mathbb{Z}$ 整数

S^1 一维环面, 也表单位圆周, 适时定义为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

S^n n 维球面

T^n n 维环面, 定义为 n 个 S^1 之积

B^n n 维开球, 若存在下标则表半径

$\mathrm{GL}(n)$ 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一般线性群

$\mathrm{SL}(n)$ 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的特殊线性群

$\mathrm{SO}(n)$ 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的特殊正交群

$\mathrm{SU}(n)$ 向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的特殊酉群

$C^n(V)$ 向量空间 V 上的 n 次可导且导数连续的函数全体

$C^{n,\alpha}(V)$ 空间 $C^n(V)$ 中 n 阶导数 α-Hölder 连续的子集

$L^2(V)$ 向量空间 V 上的平方可积函数全体

$\mathrm{T}X$ 流形 X 的切丛

T^*X 流形 X 的余切丛

$\mathbb{CP}^n$ n 维复射影空间

$\mathrm{H}^n(X,\mathbb{R})$ 流形 X 的实系数 n 阶 de Rham 上同调

d 流形上的外微分算子

$\wedge$ 楔积

∇ 流形上的联络, 或称协变导数

余下符号将在正文中定义, 且尽量遵循普遍习惯.

第一章　简介

本文旨在通过初步的代数与分析的手段, 对群 G_2 与以其为 Holonomy 群的流形有简单的了解. 本文会提供一定的前置知识介绍与细节计算, 最终将构造出一个紧致的以 G_2 为 Holonomy 群的七维流形.

第一节　历史

数学不必基于史学, 然鉴往知来, 有百利无一害.

英文词汇 Holonomy 来自物理学家 Hertz, 其原始的含义与如今几何和代数中的含义关联不大, 因此按下不表. 一战战后是一个井喷的年代, 在 Schrödinger 方程在德国被发表的同一年, 法国的 É. Cartan 为几何学引入了 Holonomy 群. 适时, 人们只对 Holonomy 群有初步的了解: 一个经典的例子是 Ambrose-Singer 定理, 一定程度上给出了 Holonomy 群的构造.

下一个时间节点是二战战后的 1955 年, 法国数学家 Berger 给出了 Holonomy 群的分类定理. 原始的定理提出了所有可能成为 Holonomy 群的线性群, 并且在 Alekseevskii 和 Salamon 的进一步排除下, 人们知道了所有 Holonomy 群. 在这个分类列表中, 有两个并非常见的群: 一个便是本文中考虑的群 G_2 , 另一个是群 Spin(7) ——这两个群统称为例外群.

分类并不是一个学科的结束, 对于 Holonomy 理论来说甚至只是开始而已. 这是因为人们对具有不同 Holonomy 群的流形还知之甚少, 对于特殊的两个例外群, 直到八十年代才得到了具有完备性的构造. 直到九十年代末, 英国数学家 Joyce 给出了具有紧性的具体构造. 时至今日, 仍然有尝试通过几何流等方法寻找紧致的且以 G_2 为 Holonomy 群的流形的努力.

第二节　行文

本文将主要分为三个部分: 前置知识的简单介绍, 具体流形的构造, 以及证明此流形确为所求. 为了行文之简洁, 部分定义将不会使用最为抽象和推广的版本, 而只会尽量贴近本文所需.

前置知识部分将大致介绍何为群 G_2 以及为我们所用的 G_2 的不可约表示. 此外 Riemann 流形上 Holonomy 群本身的定义也将被详细讲述. 如有必要, 会简

单介绍一些有用的几何操作.

具体的流形构造将从七维环面 $\boldsymbol{T}^7$ 出发, 通过对 $\boldsymbol{T}^7$ 作用一个离散群, 商掉此群的作用来得到一个有奇点的几何结构, 最后对奇点进行剪切再粘贴从而得到目标的流形. 这一流程中不仅有对流形的操作, 更有对流形上结构的操作, 并且这是更应关心的部分, 也是下一部分证明工作的根本.

一个流形以群 G_2 为 Holonomy 群的条件可以写为某种形如 Yang-Mills 方程的非线性方程, 此部分唯一的目的便是分析此方程. 这一部分将被分为两个主要定理, 其中第二个定理将会把流形上已有的结构转化为更适合分析学处理的条件, 而第一个定理将会承其衣钵, 完成证明.

第二章　前置知识

第一节　G-结构的定义与性质

对一个流形的研究可以通过对其上的结构进行研究, 进而反向得到流形的性质. 这样的哲学, 其操作手段和实现方式不胜数, 可以说占据了几何学的大半江山. 作为本文的开始, 结构群以其广泛和适用应当在第一位进行介绍.

Leiden 大学的 Federica Pasquotto 在网络上有一讲义[1]汪洋闳肆, 实现了从零开始的 G-结构教学, 是为本节最适合的参考材料.

结构群 G 将会作用于标架上, 使得标架进行变动, 标架能变动的程度被称为 G -结构. 自然语言的直观不过了了几字, 而下面的几个定义准允了严格化.

定义 2.1　令 V 为线性空间, 标架 $\mathrm{Fr}(V)$ 是 V 的所有有序基的集合.

具体写来, 标架 $\mathrm{Fr}(V)$ 中的一个元素 ϕ 可以写为 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$ 的形式, 其中 $n = \dim V$ 而 $\phi_i \in V$. 有一个典范的 $\mathrm{GL}(n)$ 的右作用出现于此, 即

$$\mathrm{Fr}(V) \times \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Fr}(V), (\phi, A) \mapsto ((\sum_j A_{i,j}\phi_j)_i).$$

此外, 我们还可以关心 V 与标准的 $\mathbb{R}^n$ 之间的标架的关系, 这实际上便是每一个 $\phi \in \mathrm{Fr}(V)$ 诱导的一个线性映照 $\hat{\phi} : \mathbb{R}^n \to V$ 把 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基 e_i 映到 ϕ_i. 有了这些简单的准备, 我们下面可以定义在线性空间情况下的 G -结构.

定义 2.2　设 V 是一个 n 维线性空间, 群 G 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的一个子群. 一个 G -结构 $\mathcal{S}$ 是 $\mathrm{Fr}(V)$ 的一个子集, 且满足如下之条件:

- 任取 $\phi \in \mathcal{S}$ 和 $A \in G$, 应有 $\phi \cdot A \in G$;
- 若 $(\phi, \phi') \in \mathcal{S}^2$, 则应有 $\hat{\phi} \circ \hat{\phi}'^{-1} \in G$.

但这样的定义不仅没有记号之便宜也疲于书写细节, 下面述而不证一个近乎平凡的命题以求给出 G-结构的另一种表达形式, 以助于后文的叙事.

命题 2.1　设 V 是一个 n 维线性空间, 而群 G 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的一个子群. 则我们有 V 上的 G -结构和 $\mathrm{Fr}(V)/G$ 中的元素之间的一一对应.

以线性空间为本, 下面的论述旨在推广至流形上. 流形 M 上每点 $x \in M$ 切空间 $\mathrm{T}_x M$ 上定义 $\mathcal{S}_x \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{T}_x M)$ 并令之光滑变动. 为了不局促于光滑性的探讨, 我们自然使用标架丛 $\mathrm{Fr}(M)$ 来进行论述且强调其作为 $\mathrm{GL}(\dim M)$-主丛的观点, 而此时收集全体 $\mathcal{S}_x$ 的无交并 $\mathcal{S} = \bigcup_x \mathcal{S}_x$ 也便成为了标架丛 $\mathrm{Fr}(M)$ 的一个光滑子流形, 以及 M 上的丛.

当然线性空间到流形的推广会带来不可胜数的新内容, 且应当指明这里自然存在两种不同意义上的切入点, 即从逐点到局部和从局部到整体. 前者大多数时候是某种分析上的问题, 滥觞于某些标志性的方程, 代表性的例子有 Frobenius 定理和 Newlander-Nirenberg 定理; 后者大部分时候是某种拓扑的困难, 如代数拓扑和示性类便可以展示局部到整体的障碍. 在本文的 G-结构部分主要关心前者, 为此也引入可积性定理的框架来统一处理. 这是相对有趣的话题, 并不打算仅浅尝辄止于本文需要的程度.

可积性定理的思想实在充分简明, 即力图用逐点的条件推出局部上的存在性. 以 Newlander-Nirenberg 定理为一个样板, 陈述为一近复结构若其 Nijenhuis 张量消失则应当为一复结构所诱导. 流形上近复结构的存在性本身是完全的逐点条件, 要求逐点的切空间上存在一个线性空间的近复结构; 复结构要求流形存在复的坐标卡, 明显带有局部的味道; 而 Nijenhuis 张量同样工作在切空间上, 但将最终使用到 Cauchy-Riemann 方程组上去获得一个局部的解. 现在本节余下部分的目标与之一致, 定义何为 G-结构的可积并寻找相关的方程.

定义 2.3 取定 n 维流形 M 上的一个 G-结构 $\mathcal{S}$, 一个 M 的坐标卡 (U, x_0) 被称为适应于此 G-结构, 若其诱导的切向量组成的标架恰好落入此 G-结构, 即

$$(\partial_1(x), \cdots, \partial_n(x)) \in \mathcal{S}_x, \forall x \in U.$$

称一个 G-结构是可积的, 若对于任何 $x \in M$ 附近存在一个相适应的坐标卡.

作为切空间诱导的结构, 被流形间的光滑映照所推拉也均可自然定义, 此处不再复述. 在此框架下, 积分子流形的存在性被视为某个分块三角化矩阵群对应的可积性, 复结构的存在性则是 $2n$ 维流形上 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-结构的可积性.

另一方面, 流形上的 G-结构的定义形式上类似于主丛, 这启示我们完全可以使用主丛的表述和工具来研究. 关于主丛的入门性材料不妨参照笔者曾与好友在一学生刊物上所写的短文[2]的前一部分, 建立了微分几何中主丛的定义直至联络与曲率的定义; 后一部分旨在推介代数学家如何点评主丛, 并在数论中大展身手.

然而主丛是极为一般的对象, 显见只有一部分主丛可被视为 G-结构, 如一要求在于至少要让 G 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的一个子群. 同样我们关注到一个 G-结构是从 $\mathrm{T}M$ 上的标架丛得到的. 如下命题可综上总言, 以资参考.

命题 2.2 群 G 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的一个闭子群. 则一个 M 上的 G-主丛 P 同构于一个 G-结构 $\mathcal{S}$ 当且仅当 P 伴随的向量丛是切丛 $\mathrm{T}M$ 本身, 其中伴随丛的定义中使用 G 作为 $\mathrm{GL}(n)$ 的子群的自然的 $\mathbb{R}^n$ 的表示.

主丛的约化可以给出线性空间上 G-结构的性质的推广, 总结为如下命题.

命题 2.3 给定一个流形 M 与群 $G \subset \mathrm{GL}(n)$, 则流形上 M 上的 G-结构 $\mathcal{S}$ 一一对应于投影 $\mathrm{Fr}(M)/G \to M$ 的光滑截面 σ.

少量基于层论的思索立刻能给出下述推论.

推论 2.4 取 Lie 子群 $H \subset \mathrm{GL}(n)$, 若 $\mathrm{GL}(n)/H$ 可缩则 H-结构的存在性恒可保证. 取 $H = \mathrm{O}(n)$ 立得结论: 任一流形上总可定义 Riemann 度量.

当然, 主丛仍然只能作为讨论的框架, 而作为具体的 G-结构则有主丛所没有的结构: 接下来要构造的重言形式是不得不谈的.

定义 2.4 给定 n 维流形 M 上的一个 G-结构 $\mathcal{S}$, 其上可以定义一重言形式 $\theta_{\mathcal{S}} \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$ 为, 任取 $X_u \in \mathrm{T}_u\mathcal{S}$, 定义

$$(\theta_{\mathcal{S}})_u(X_u) = \hat{u}^{-1}((\mathrm{d}\pi)_u(X_u)) \in \mathbb{R}^n,$$

其中 π 为投影 $\mathcal{S} \to M$.

此定义稍显复杂, 我们可以逐步拆解理解. 首先 $u \in \mathcal{S}$ 即是 u 是底流形某一点 x 上的标架, 如前之所述这诱导了同构映照 $\hat{u} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}_x M$. 而 $\mathrm{d}\pi$ 把 $\mathcal{S}$ 上的切向量推为 M 上的切向量, 最后通过 $\hat{u}^{-1}$ 变成一个普通的 $\mathbb{R}^n$ 中的向量.

补充以下些许定义, 意在指出重言形式所具有的性质.

定义 2.5 设 P 为一个 G-主丛且设 V 为一个线性空间. 称形式 $\omega \in \Omega^k(P, V)$ 是水平的, 若只要存在某个 X_i 是竖直的则必有 $\omega(X_1, ..., X_k) = 0$, 特别地, 称形式 $\omega \in \Omega^1(P, V)$ 是严格水平的, 若任取 $u \in P$, 有 $\mathrm{Ker}\omega_u$ 恰为某一竖直子空间.

定义 2.6 记号 P 和 V 同上且额外考虑 ρ 是 G 的一个 V-表示, 则称形式 ω 是 ρ-不变的, 若 $R_g^*(\omega) = \rho(g^{-1}) \circ \omega$, 其中 R_g 为右乘 g 的作用. 不引起歧义或表示没有特殊记号时也直接称之为 G-不变.

易见重言形式是严格水平且 G-不变的, 这里的表示是 G 作为 $\mathrm{GL}(n)$ 的子群自然诱导的表示. 下一命题将指明重言形式几乎代表了 G-结构本身.

命题 2.5 给定 $G \subset \mathrm{GL}(n)$ 为一个闭子群, 设 P 为 M 上的一个 G-主丛, 则有如下两条等价陈述:

(i) 主丛 P 可视为 M 上的一个 G-结构;

(ii) 存在一个严格水平且 G-不变的 1-形式 $\theta \in \Omega^1(P, \mathbb{R}^n)$. 当本条成立时, 形式 θ 可以通过选取恰当的嵌入 $P \hookrightarrow \mathrm{Fr}(M)$ 成为对应的 G-结构的重言形式.

通过这一个又一个命题实际上允许人们逐渐可以离开原始的 G-结构的定义去研究 G-结构了, 如研究投影映照的截面或在主丛语境中使用重言形式——此

处仅为举例, 后续行文将展示其方便之处与必要之处. 现在来补全作为微分几何不可或缺的最后一块拼图, 即联络及其生发出来的曲率和挠率. 当然, 直接使用主丛的联络以便不必从头起述.

定义 2.7 称 n 维流形 M 上一个联络 ∇ 与 G-结构 $\mathcal{S}$ 相适应, 若其诱导的标架丛上的联络 $\omega \in \Omega^1(\mathrm{Fr}(M), \mathfrak{gl}(n))$ 限制在 $\mathcal{S}$ 上有 $\omega|_{\mathcal{S}} \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathfrak{g})$.

观点的丰富化后允许兼有切丛 (向量丛) 和主丛两种并行的表述, 但实际上主丛的知识指明这一切流程之间不仅等价而且可以互相转化. 故此处不妨选用切丛的表述来给出曲率和挠率的定义, 并最终得到著名的 Cartan 结构方程.

定义 2.8 联络 ∇ 的曲率张量定义为 $K_\nabla = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$, 易见有 $K_\nabla \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(\mathrm{T}M))$. 联络 ∇ 的挠率张量定义为 $T_\nabla(X,Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$, 易见 $T_\nabla \in \Omega^2(M, \mathrm{T}M)$.

曲率是与主丛相伴而生的定义, 我们对之充分了解. 但挠率则是对切丛独有的定义, 我们设想这也许与重言形式相关. 正如此言, 可用一种统一的观点理解: 由曲率的主丛定义, 易见曲率是 $\mathrm{d}\omega$ 的水平部分, 同样可谈道挠率是 $\mathrm{d}\theta$ 的水平部分, 其中 θ 是重言形式.

有了这些准备工作便有了如下的 Cartan 结构方程.

命题 2.6 考虑 $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathfrak{g})$ 是与 G-结构 $\mathcal{S}$ 相容的联络, 形式 θ 为 $\mathcal{S}$ 的重言形式. 则我们有如下两条方程

$$\mathrm{d}\omega = K(\theta \wedge \theta) - \frac{1}{2}[\omega, \omega],$$
$$\mathrm{d}\theta = T(\theta \wedge \theta) + \omega \wedge \theta.$$

其中 K 与 T 为联络 ω 下的曲率与挠率.

显然这里应当给出一定的解释, 尤其是关于 $\wedge$ 等几个记号的复用. 通过作用 $\mathfrak{g} \times V \to V$ 可以上升到 $\Omega^1(\mathcal{S}, \mathfrak{g}) \times \Omega^1(\mathcal{S}, V) \to \Omega^2(\mathcal{S}, V)$ 来给出 $\omega \wedge \theta$ 这一项的定义, 而在这里 $V = \mathbb{R}^n$ 且 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$ 为子 Lie 代数, 因此作用是自然的矩阵乘法. 凭依此法, 项 $[\omega, \omega]$ 背后的是其本身的 Lie 括号 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, 而曲率项和挠率项背后则是更为复杂的三元组 $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, U) \times V \times V \to U$, 其中 U 或为 $\mathfrak{g}$ 或为 V.

直到此处, 对 G-结构理论的大框架已经建立, 下面将回去从曲率和挠率入手研究可积性. 在前文所提对特殊的结构的可积性定理外, 亦存在一个与曲率相关的可积性定理: 记 M 为流形而 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, 形式 $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 对应的曲率消失则可实现为 G 上 Maurer-Cartan 联络的拉回. 这一结果可以推广到 G-结构, 在 Cartan 结构方程的帮助下得到如下定理.

定理 2.7 一个 G-结构可积当且仅当存在与 G-结构相容的平坦无挠联络.

为展示 Cartan 结构方程之用, 此处以简短有力的小段给出证明流程. 从左至右通过良好书写局部平凡化, 取 Maurer-Cartan 联络为最速手法. 选取符合定理右部的联络 ω, 代入 Cartan 结构方程有

$$\mathrm{d}\theta = \omega \wedge \theta,$$
$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

定义 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$ 及 $\tilde{G} = G \times V$, 取扩展的 Lie 括号如斯

$$[(g_1, v_1), (g_2, v_2)] = ([g_1, g_2], g_1(v_2) - g_2(v_1)),$$

其间已用 $\mathfrak{g}$ 在 V 的左作用. 定义 $\Omega = (\omega, \theta)$ 为 $\mathcal{S}$ 上取值于 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中的形式. 则此时上述两条方程可以整合为

$$\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}[\Omega, \Omega] = 0,$$

由上述可积性定理得局部微分同胚 $\mathcal{S} \to \tilde{G} = G \times V$ 并使得 Ω 是以此拉回而成的 Maurer-Cartan 联络. 该映照有 G-等变的良好性质, 从而商掉群的作用得到底流形局部上用 V 表达的坐标卡且天然与 G-结构相容.

引入 G-结构的内禀挠率作为本节的结尾再合适不过, 兼顾下文的需求与本节的首尾呼应. 定义映照 $\partial : \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ 为 $\partial(f)(u, v) = f(u)(v) - f(v)(u)$, 其中 $\mathfrak{g}$ 以左乘自然作用到 V 上, 与上述一致. 则此 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的挠空间定义为商空间 $T(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)/\mathrm{Im}\partial$. 给定一个联络 ∇ 后, 通过把挠率 T_∇ 视为 $\mathcal{S} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ 的映照并复合商映射便得到 $T : \mathcal{S} \to T(\mathfrak{g})$, 此即内禀挠率. 以“内禀”为前置形容词旨在说明与联络之选取无关, 为指定一 G-结构真正的挠率. 遵循大部分文本的习惯, 本节过后将直接以“挠率”唤之.

定理 2.8 如果 G-结构 $\mathcal{S}$ 是可积的, 则其内禀挠率 T 必消失.

很可惜, 这个定理的逆并不总是成立. 但作为有趣的补充, 发现常见的状况竟均成立定理的逆: 对于复结构, 内禀挠率恰是 Nijenhuis 挠率张量; 对于辛结构, 内禀挠率消失等价于辛形式是闭的——前者是 Newlander-Nirenberg 定理而后者是 Darboux 定理.

第二节　Holonomy 群的定义与性质

在 Riemann 流形上考虑平行移动是再自然不过的. 而所谓的 Holonomy 群实际上是考虑了闭合道路回到原点之后, 平行移动把切向量转动了多少. 本节相对

完备的参考资料源于 Joyce 的千禧年著作[3], 内容面面俱到且不失必要的几何论述. 但 Joyce 对某些 Holonomy 群的理论未作以充足的论述, 故额外介绍 Salamon 的成书[4] 以为进一步的补充. 值得一提在于 Salamon 充分介绍了 Lie 群的表示论, 因而可凭依此书作为下一节内容的辅助.

定义 2.9 预定流形 M 与其上的联络 ∇ . 给定一基于 $x \in M$ 的分片光滑回路 $\gamma : [0,1] \to M$, 则其上的平行移动诱导切空间 $\mathrm{T}_x M$ 上的自同构, 所有这样生成的自同构全体构成 $\mathrm{Hol}_x(\nabla) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{T}_x M)$.

应当指出此定义并未直接说明 $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ 是一个 (Lie) 群, 这一结果是由 Borel 和 Lichnerowicz 首先证明的, 相关结果也可见诸原文[5]. 而若底流形上两点 x, y 之间有道路相连, 则在两点上的 Holonomy 群只相差共轭作用, 因此可以在底流形连通时定义 $\mathrm{Hol}(\nabla)$, 并注意这只在共轭意义下良好定义.

考察 Holonomy 群的结构本身时, Ambrose 和 Singer 的定理指出了此群的 Lie 代数可以被和曲率相关的资料生成, 具体而言便是由集合

$$\{K_x(X,Y) | X, Y \in \mathrm{T}_x M\}$$

生成. 直观而言, 就是切向量沿充分小的平行移动回路可以得到曲率, 同时也与 Holonomy 的定义契合. 这是一个漂亮的定理, 但本文后续中不会使用这个定理进行具体的工作, 因此暂时搁置. 如欲对此定理有进一步的探索, 原文[6] 亦可因其简短易读的益处作为参考材料.

视角回到更为具体的 Riemann 流形, 此时联络是由度规 g 诱导的存在且唯一的 Levi-Civita 联络, 因而对 Holonomy 群的记号将变换为 $\mathrm{Hol}(g)$ 以突出度规本身和所选取的恰是 Levi-Civita 联络.

人们考虑群 $\mathrm{Hol}_x(g)$ 可以自然作用到线性空间 $\mathrm{T}_x M$ 上, 是为群的表示, 并且完全可能是可约的表示——本文段以此为前提续写. 即假设存在表示的直和分解 $\mathrm{T}_x M = \mathrm{T}'_x M \oplus \mathrm{T}''_x M$, 此时也称 M 可约. 令 x 光滑变动得到一族切空间的直和分解, 满足 Frobenius 可积性定理的条件且均对应于完全测地子流形. 因此 M 局部上就是这两个子流形之积. 这一过程可以反复进行, 直至所有表示均不可约. 总之, 将流形局部地分成了多个子流形之积. 这便是 de Rham 首先证明的 Holonomy 约化定理[7], 整理并陈述如下.

定理 2.9 设 M 为单连通 Riemann 流形, 设 $\mathrm{T}M = \mathrm{T}_1 M \oplus \cdots \oplus \mathrm{T}_k M$ 为切丛作为 M 的 Holonomy 群的表示的不可约直和分解, 则流形 M 局部等距同构于积流形 $V_1 \times \cdots \times V_k$, 其中 V_i 是每个直和分量对应的积分子流形. 更甚, 流形 M 的

Holonomy 群本身为诸积分子流形的 Holonomy 群之积.

下面来到 1955 年, 人们得到了 Berger 对不可约的非局部对称 (一常见等价条件为 $\nabla K \neq 0$) 的单连通 Riemann 流形上可能有的 Holonomy 群的完全分类[8].

表 2.1 Berger 列表

$\mathrm{Hol}(g)$	$\dim M$
$\mathrm{SO}(n)$	n
$\mathrm{U}(n)$	$2n$
$\mathrm{SU}(n)$	$2n$
$\mathrm{Sp}(n)$	$4n$
$\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$	$4n$
G_2	7
$\mathrm{Spin}(7)$	8

人们对前五类的流形相对了解, 如 Holonomy 群为 $\mathrm{SU}(n)$ 的流形即大名鼎鼎的 Calabi-Yau 流形. 而本文要研究的则是第六类, 即特殊的 G_2 对应的流形.

这一定理几乎可以说是纯代数的定理, 原证明的思路渊源于 Ambrose-Singer 定理, 通过对曲率细致的刻画来分类所有可能的 Lie 代数, 进而得到所有可能的 Holonomy 群. 这也留下了许多的问题: 由于这一证明的非构造性, 使得人们仍然想要构造一些例子来使自己信服. 同时, 这一流程大多是必要条件而非充分, 因而应当保持对存在性的担心. 如曾经出现在表单上的 Spin(9) 对应的流形实则只能或局部等距同构于实 Cayley 平面或局部平坦, 不论如何均致使局部对称.

另一方面, 对于 G_2 和 Spin(7) 两个群仍然棘手. 第一步由 Bryant 迈出, 通过外微分系统的工具证明了局部的存在性, 对此参阅原论文[9]是极佳的. 仅在两年后的论文[10]中 Bryant 和 Salamon 便给出了以 G_2 和 Spin(7) 为 Holonomy 群的完备流形的构造, 如对于 G_2 考虑了 S^3 上的秩为 4 的 Spin 丛, 或自对偶 Einstein 四维流形 M^4 上的反自对偶丛 Λ^2_-, 其中对 M^4 可以选取诸如 S^4 或 $\mathbb{CP}^2$ 这些已在 Atiyah, Singer 和 Hitchin 在 1978 年的论文[11]中研究过的例子.

诚然这些东西都很值得一书, 然而已经完全超出了本文讨论的内容, 不得不作罢. 本文的目标发生在上述一切之后, 由 Joyce 给出的以 G_2 为 Holonomy 群的紧流形的构造. 后人如山海般的论文堆中仍然可出现一些本质上创新的构造法, 但核心的分析部分却是大同小异. 文章合为时而著, 二十一世纪后几何流的尝试涌现, 如不少人试图以 Laplacian 流入场. 本文选择保留原始的分析风味, 初心无改, 体会 Joyce 开创性的证明[12].

然对上述文段对群 G_2 呼来唤去却一点不知未免落为笑话, 故当务之急在于对 G_2 有初步的了解, 立刻进入下一节来实现这一目标.

第三节　群 G_2 的定义与性质

此群在许多表述中被称为八元数的自同构群, 即 $\mathrm{G}_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$. 其表述固然优美, 然而并不适合较为分析的语境下, 因此给出另一个定义.

在 $\mathbb{R}^7$ 上预定一个定向与标准度量 g, 令 $y_1, \cdots, y_7$ 是 $(\mathbb{R}^7)^*$ 的定向的标准正交基. 定义 $\mathbb{R}^7$ 上的一个 3-形式

$$\begin{aligned}\varphi_0 = {} & y_1\wedge y_2\wedge y_7 + y_1\wedge y_3\wedge y_6 + y_1\wedge y_4\wedge y_5 + y_2\wedge y_3\wedge y_5 \\ & - y_2\wedge y_4\wedge y_6 + y_3\wedge y_4\wedge y_7 + y_5\wedge y_6\wedge y_7.\end{aligned}$$

现在可以给出 G_2 的定义如下.

定义 2.10　群 G_2 为所有保持 φ_0 不变的自同构 $\{g \in \mathrm{GL}(7) | g^*(\varphi_0) = \varphi_0\}$.

由此也可以还原出其上的内积, 即

$$\frac{1}{6}(\iota_x\varphi_0)\wedge(\iota_z\varphi_0)\wedge\varphi_0 = g(x,z)\mathrm{d}\mu,$$

其中 $\mathrm{d}\mu$ 为标准的体积形式, 以 ι 表示形式被切向量缩并. 该群丰富的基本性质直接罗列如下而不加以琐碎的证明, 如有必要, 由 Bryant 所著的长文[9]可视为良好的辅助材料, 尤其是代数级别的性质详尽备至.

命题 2.10　对群 G_2 有如下诸性质成立:

- 群 G_2 为 $\mathrm{GL}(7)$ 的一个 14 维 Lie 子群;
- 群 G_2 为紧致连通且单连通的半单 Lie 群;
- 形式 φ_0 的 $\mathrm{GL}(7)$-轨道在 3-形式中是开的, 且微分同胚于 $\mathrm{GL}(7)/\mathrm{G}_2$;
- 群 G_2 对 $\mathbb{R}^7$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的典范作用均是不可约的.

这里我们逐渐开始去理解 G_2 的表示, 尤其关心几个 n-形式丛的不可约表示分解, 这将最终展示为某个算子的线性化信息. 在此之前, 把以上内容推广到流形上是必要的准备工作.

延续命题2.3的思路, 首先逐点进行良好定义, 再使用截面推广到流形上. 对于平直的 $\mathbb{R}^7$, 称呼 φ_0 的 $\mathrm{GL}(7)$-轨道为 $\Lambda^3_+\mathbb{R}^7$. 则对于 X 为一个可定向 7 维流形, 同样定义 Λ^3_+X 为 $\Lambda^3\mathrm{T}^*X$ 的子集, 即底流形 X 逐点上的纤维为 $\Lambda^3_+\mathrm{T}^*_xX$. 则上述命题告诉我们这是一个开子集, 且任一截面定义了一个 X 上的 G_2-结构.

同时知晓 g 可以被 φ_0 还原, 流形上亦凭依此法, 通过选定一个 $\varphi \in \Lambda^3_+X$, 得到整个流形上的度规 g, 进而获得 Hodge-$*$ 算子. 则对于平直空间, 可以类似地定义 $*\varphi_0$ 的 $\mathrm{GL}(7)$-轨道为 $\Lambda^4_+\mathbb{R}^7$, 为 $\Lambda^4(\mathbb{R}^7)^*$ 中的开集且同样微分同胚于 $\mathrm{GL}(7)/\mathrm{G}_2$. 凭依此法, 对 Λ^4_+X 的定义完全一致. 因此也得到了微分同胚 $\Theta : \Lambda^3_+X \to \Lambda^4_+X$.

具体来说, 对于任取的 $\sigma \in \Lambda^3_+ X$ 诱导了一个 Hodge-$*$ 算子, 记为 $*_\sigma$, 以下标强调 $*$ 对 σ 的依赖. 则 $\Theta(\sigma) = *_\sigma \sigma$. 注意对于不同的截面并不一定诱导同样的 Hodge-$*$ 算子, 因此映照 Θ 并没有良好的线性性. 然有舍有得, 这样的定义保证了算子 Θ 的 GL(7)-等变性, 或以代数学家更喜好的语言称为表示间的同态.

有了上述引入的 Hodge-$*$ 算子, 可以把 k-形式丛与 $(7-k)$-形式丛在表示的意义上等同起来. 为了一定程度上理解 G_2 的表示而不过于深入整套 Lie 代数表示论, 点到为止, 此处将以较为粗糙的形式给出诸丛的不可约分解.

任取 $x \in X$. 对于 $\Lambda^1(\mathrm{T}^*_x X)$, 作为表示同构到 $\mathrm{T}_x X$ 本身, 是已经知悉的不可约表示. 对于 2-形式丛, 一个观察在于维数恰为 $7+14$ 维, 实际上易见一个 7 维子表示 $\{\iota_e\varphi | e \in \mathrm{T}_x X\}$, 而 14 维子表示是映照 $\psi \mapsto \psi \wedge *\varphi$ 的核空间, 同构于 $\mathfrak{g}_2$.

现在转向对 Λ^3 的分析, 以考虑满射 $\mathrm{End}(\mathrm{T}_x X) \to \Lambda^3(\mathrm{T}^*_x X)$ 开始. 此映照为 $\mathrm{GL}(\mathrm{T}_x X)$ 作用到 φ 上的线性化, 其核空间正是 $\mathfrak{g}_2$. 如下经典的表示的同构

$$\mathrm{End}(\mathrm{T}_x X) \simeq \mathrm{T}_x X \otimes \mathrm{T}^*_x X \simeq \mathrm{T}^*_x X \otimes \mathrm{T}^*_x X \simeq \Lambda^2(\mathrm{T}^*_x X) \oplus \mathrm{S}^2(\mathrm{T}^*_x X),$$

辅以关于 $\Lambda^2(\mathrm{T}^*_x X)$ 了然于心的不可约表示分解, 两边商去 $\mathfrak{g}_2$ 后得到 $\Lambda^3(\mathrm{T}^*_x X) \simeq \mathrm{T}_x X \oplus \mathrm{S}^2(\mathrm{T}^*_x X)$. 对于 $\mathrm{S}^2(\mathrm{T}^*_x X)$, 有一个平凡的分量是内积乘上一个系数, 沿同构追溯回去便是 φ 本身乘上一个系数; 可以证明剩下的无迹部分 $\mathrm{S}^2_0(\mathrm{T}^*_x X)$ 是一个 27 维的不可约表示. 综上所述, 不可约表示的分解可形式地写为 $\Lambda^3(\mathrm{T}^*_x X) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathrm{T}_x X \oplus \mathrm{S}^2_0(\mathrm{T}^*_x X)$.

将以上内容整理为如下命题, 并引入新记号.

命题 2.11 设 X 是一个定向的 7-流形, 通过给定的 3-形式 φ 定义了 X 上的 G_2-结构与度规 g 和度规诱导的 Hodge-$*$ 算子. 则丛 $\Lambda^k\mathrm{T}^*X$ 如同下文列举般, 正交地分裂为一些不可约 G_2-表示的分量:

(i) 丛 $\Lambda^1\mathrm{T}^*X = \Lambda^1_7$ 而丛 $\Lambda^6\mathrm{T}^*X = \Lambda^6_7$;

(ii) 丛 $\Lambda^2\mathrm{T}^*X = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$ 而丛 $\Lambda^5\mathrm{T}^*X = \Lambda^5_7 \oplus \Lambda^5_{14}$;

(iii) 丛 $\Lambda^3\mathrm{T}^*X = \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}$ 而丛 $\Lambda^4\mathrm{T}^*X = \Lambda^4_1 \oplus \Lambda^4_7 \oplus \Lambda^4_{27}$.

其中 $\Lambda^k_l \subset \Lambda^k\mathrm{T}^*X$ 的下标 l 表示其纤维的维数, 而 $*$ 算子给出了 Λ^k_l 和 Λ^{7-k}_l 之间的等距同构.

承接此命题, 定义 π_l 表示到 l 维不可约子表示的正交投影, 由于对于某个给定的 Λ^k 里面的不可约表示维数均不同, 因而此处进行一取巧而不标注 k. 但此命题只保留了前面大段论述中的维数信息, 为了一定程度上保留每个子空间构造出来的方式, 给出一个计算性的命题.

命题 2.12 对于 G_2-结构 $\varphi \in \Gamma(\Lambda^3_+ X)$, 记其诱导的 Hodge-$*$ 算子为 $*$, 以及诸 Λ^k_l 如上. 则存在唯一 $\tau_0 \in C^\infty(X)$, $\tau_1 \in \Omega^1(X)$, $\tau_2 \in \Gamma(\Lambda^2_{14})$, $\tau_3 \in \Gamma(\Lambda^3_{27})$, 使得如下二等式成立:

$$\mathrm{d}\varphi = \tau_0 * \varphi + 3\tau_1 \wedge \varphi + *\tau_3,$$

$$\mathrm{d} * \varphi = 4\tau_1 \wedge *\varphi + \tau_2 \wedge \varphi.$$

无他, 不过是按照各 Λ^k_l 的构造写出来而已. 唯一的非平凡之处在于两式中均出现了 τ_1, 这只需代入恒等式 $(*\mathrm{d}\varphi) \wedge \varphi + (*\mathrm{d} * \varphi) \wedge (*\varphi) = 0$ 即可验证. 立刻写下一个将来会使用的推论.

推论 2.13 设 $\varphi \in \Gamma(\Lambda^3_+ X)$, 若 $\mathrm{d}\varphi = 0$, 则 $\mathrm{d} * \varphi \in \Gamma(\Lambda^5_{14})$.

至此, 对 G_2 的性质有了一定程度上的了解, 正当回到 Holonomy 群这一主题.

首先若 Lie 群 H 是 Riemann 流形 (M, g) 的 Holonomy 群, 则 g 的 Levi-Civita 联络 ∇ 必然保持 M 上的 H-结构, 换言之, 即是 H-结构的无挠联络——直观上, 挠率描述了沿平行移动时纤维的扭曲, 我们应当保持变化的程度还在 H 中. 以上直观的文字仍有些许无力, 以如下引自 Joyce 书[3]中的命题明之.

命题 2.14 设 (M, g) 是 n 维 Riemann 流形, 群 H 是 $\mathrm{O}(n)$ 的 Lie 子群. 则 M 上存在无挠 H-结构当且仅当 $\mathrm{Hol}(g) \subset H$. 更具体而言, 固定一个 M 上的 $\mathrm{O}(n)$-结构 P, 则有, 所有包含于 P 中的无挠 H-结构与 H-齐性空间 $\{A \in \mathrm{O}(n) | A^{-1}\mathrm{Hol}(g)A \subset H\}$ 之间的一一对应.

此处讨论时使用 $\mathrm{O}(n)$ 的原因仅仅是因为已经是 Riemann 流形, 目的不过是选取的大结构至少保持 Riemann 度量.

回到 G_2 的语境中, 截面 $\varphi \in \Gamma(\Lambda^3_+ X)$ 的选取决定 X 上的 G_2-结构, 度规 g 由截面 φ 诱导. 要求无挠实为对 φ 提条件. 计算指出挠率完全取决于命题2.12中的诸 τ_i, 故无挠即方程组 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d} * \varphi = 0$. 仅作确认, 此处把挠率 T 写出来:

$$T = \frac{\tau_0}{4} g - \iota_{\tau_1^\#}\varphi - \bar{\tau}_3 - \frac{1}{2}\tau_2,$$

其中 $\bar{\tau}_3$ 是 τ_3 从 Λ^3_{27} 沿表示的同构回到 $\mathrm{S}^2_0(\mathrm{T}^* X)$ 中对应的元素, 而 $\tau_1^\#$ 是通过 g 提供的指标升降从 1-形式 (余切向量场) 变成切向量场. 对挠率的具体计算推荐见诸 Karigiannis 的论文[13], 大量强硬的指标计算一力降十会.

时刻注意书写的 $*$ 算子是取决于 g, 进而依赖于 φ 的, 这总会导致方程的非线性性. 不论如何, 以上内容暂时可以总结道: 当 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d} * \varphi = 0$ 成立时, 此流形的 Holonomy 群必然包含于 G_2 中.

然由于 Berger 列表的存在, 一个七维流形并没有太多的 Holonomy 群的选择.

易见在群 G_2 里能取到的子群至大也只能是 SU(3), 但不论 SU(3) 或其子群作为七维流形的 Holonomy 群都将迫使流形的可约. 依此观察, 下面的引理将告诉我们一个简单的单连通性即可令其 Holonomy 群恰为 G_2.

引理 2.15 设 X 是连通且单连通的 7 维紧流形, 其上存在一个无挠的 G_2-结构. 设 g 是此 G_2-结构诱导的度规, 则 $\mathrm{Hol}(g) = G_2$.

证明 由上述的讨论已经知晓了必有 $\mathrm{Hol}(g) \subset G_2$, 由 Bonan 定理知这迫使了流形的 Ricci 平坦性. 固定任取的 $x \in X$. 本证明的核心在于说明 $\mathrm{Hol}(g)$ 作用到 $\mathrm{T}_x X$ 上是不可约的, 由此可根据 Berger 列表结束论证.

若不然, 由 de Rham 的 Holonomy 约化定理知, 存在两个 Ricci 平坦的 (X_1, g_1) 和 (X_2, g_2) 使得 $X = X_1 \times X_2$ 且 $g = g_1 \times g_2$. 总可以假设有 $0 < \dim X_1 \leqslant 3$, 则这迫使 X_1 是平坦的. 但不高于 3 维的单连通紧流形只有如 S^3 的典范几例, 均无法携带平坦度量, 此矛盾明所欲证. ∎

证明中提及的 Bonan 定理[14]来自于 Holonomy 群的存在对曲率的约束, 某种意义上可以视为 Ambrose-Singer 定理的反向定理. 更一般而言, 对于一个以 H 为 Holonomy 群的流形 X, 曲率的取值会被限制于 $\mathrm{S}^2\mathfrak{h} \subset \Lambda^2(\mathrm{T}^*X) \otimes \Lambda^2(\mathrm{T}^*X)$.

本节的全部内容力求理解最终要证明的内容不过是流形上一个非线性方程组的解的存在性. 为达成这一目的, 除巧妙地构造流形外也应承担估计的任务, 准备一定的分析工具是有裨益的.

第四节 流形上的分析工具

本节的标题为彻底的虚张声势, 不过只想把在欧氏空间中的结论转移到流形上罢了. 总设 $E \to X$ 是一个向量丛, 带有度量 g 及保持度量的联络 ∇. 记号 v 或携带下标的 v_i 总代表截面. 由于本节中真正的内容见于诸分析学课程中, 因而行文中只有堆砌的定义, 这样的滞重与思路的轻快难两全, 只得倾向于快速明晰主干内容. 至于本节中真正扎实的分析内容可参考任一优良的教材, 如例取 Taylor 的偏微分方程三部曲之首[15].

定义 $L^2(X, E)$ 为所有局部可积且整体平方可积的截面全体. 这里 E 上逐纤维的内积结构抬升到了 $L^2(X, E)$ 的内积结构, 即

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_X g(v_1, v_2) \mathrm{d}\mu.$$

此外, 当 X 的紧性存在时, 这将准许分部积分的操作, 即 $\langle \mathrm{d}\chi, \xi \rangle = \langle \chi, \mathrm{d}^*\xi \rangle$, 此处

χ 是 X 上的 k-形式而 ξ 是 $(k+1)$-形式, 不过是选取了 $E = \Lambda^{k+1}(\mathrm{T}^*X)$. 另外算子 d^* 由 $*$ 诱导, 负号的有无从来并非本质而只是约定问题, 此处为了分部积分公式形式上的优美选择将负号内置到 d^* 中.

下面来定义 $C^{n,\alpha}$-范数. 首先是 C^n, 可以简单定义为 $\|v\|_{C^n} = \sum_{j=0}^n \sup_X |\nabla^j v|$. 对于 Hölder 的部分 $C^{0,\alpha}$ 首当其冲, 更具体来说从定义函数的 $C^{0,\alpha}$ 的范数开始, 尔后再考虑向量丛的截面. 为方便设 X 连通, 则任取 $x, y \in X$, 两点的距离 $d(x, y)$ 良好定义. 如欧氏空间一样, 称函数 f 为 α-Hölder 连续的, 若

$$[f]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha}$$

为一有限数. 则自然有 $\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_{C^0} + [f]_\alpha$.

对于向量丛的截面有一个问题是 $v(x)$ 和 $v(y)$ 并不是同一个向量空间中的元素, 无法直接进行运算; 这里只能依靠平行移动把两个向量推到一起, 对指定路径成为必需. 令 F 为全体 $\gamma : [0,1] \to E$ 使得 γ 的像是 E 中测地线, 凭依上文有

$$[v]_\alpha = \sup_{\gamma \in F} \frac{|v(\gamma(0)) - v(\gamma(1))|}{l(\gamma)^\alpha},$$

其中 l 为长度函数, 分子表征通过沿 γ 的平行移动到同一纤维中计算, 由于 ∇ 保持度量故而保证良好定义. 综之定义 $\|v\|_{C^{n,\alpha}} = \|v\|_{C^n} + [\nabla^n v]_\alpha$, 取 $C^{n,\alpha}(X, E)$ 为使得 $C^{n,\alpha}$-范数有界的全体, 是为 Banach 空间. 当 X 不引发混淆时也记作 $C^{n,\alpha}(E)$.

把以上这些分析中的常用工具搬到流形上之后, 大部分结论也都可以随之带来. 如利用 Hölder 不等式容易制造插值不等式, 此处同样写出一道

$$[v]_\alpha \leqslant (2\|v\|_{C^0})^{1-\alpha} \|\nabla v\|_{C^0}^\alpha.$$

重头戏是在线性椭圆算子的正则性提升, 比如设 P 为一 l 阶线性椭圆算子且方程 $P(v) = w$ 中 $w \in C^{k,\alpha}$, 则大部分时候可以有 $v \in C^{k+l,\alpha}$ 这样的好结果. 在流形上, 重述为如下命题.

命题 2.16 设 X 是紧 Riemann 流形, 其上有两个同秩的向量丛 E 和 F, 算子 P 为此二丛间的 l 阶光滑线性椭圆算子. 任取非负整数 k 和 $\alpha \in (0,1)$. 则 P 可视为 $C^{k+l,\alpha}(X, E) \to C^{k,\alpha}(X, F)$ 的映照, 且核空间有限维. 设方程 $P(v) = w$ 在弱意义下成立, 即 v 和 w 均只有 L^2. 则存在正则性提升: 若 $w \in C^\infty$ 可有 $v \in C^\infty$, 若 $w \in C^{k,\alpha}$ 可有 $v \in C^{k+l,\alpha}$; 且有 Schauder 估计

$$\|v\|_{C^{k+l,\alpha}} \leqslant C(\|w\|_{C^{k,\alpha}} + \|v\|_{L^2}),$$

其中常数 C 只取决于 P, k, α 等算子和空间的信息. 特别指出, 若 v 在 L^2-意义下垂直于 Ker$P$, 则 Schauder 估计中可以通过调节 C 去掉 v 的 L^2-范数.

对于 P 的系数只有 Hölder 连续而非光滑时也有一个类似的命题如下.

命题 2.17 诸 X, E, F 等设定同上命题, 但 P 为二阶线性椭圆算子且系数为 $C^{k,\alpha}$ 的. 则方程 $P(v) = w$ 中若 $w \in C^{k,\alpha}$, 那么可以有 $v \in C^{k+2,\alpha}$ 的正则性提升.

流形上的分析工具最终会帮助我们证明形变 G_2-结构的无挠性, 但分析对几何并非总是完美. 为了实现对流形的构造, 还有必要介绍一些已为人们相对透彻研究的几何对象. 维数的等式 $7 = 4 + 3$ 给予一定的启发: 具体研究时关注 4 维部分的详细性质而让 3 维的部分尽量简洁, 如 T^3 这样较为平凡但经典的几何对象, 兼具平坦和紧等优良性质. 前置知识一章的行文即将结束, 现由最后一节来介绍对 4 维部分的处理会参考的特殊流形.

第五节 Eguchi-Hanson 空间与 Kummer 构造

这一节的目标实为通过介绍对 K3 曲面的 Kummer 构造, 来引出后文中对以 G_2 为 Holonomy 群的流形的构造. 此处提及的 K3 曲面可以认为是某种意义上唯一非平凡的紧四维 HyperKähler 流形, 其 Holonomy 群为 SU(2). 而所谓的 Kummer 构造便是一种制造这样的曲面的技术, 并且可用分析的工具证明其上以通过形变的方式实现一个以 SU(2) 为 Holonomy 群的度量.

Kähler 流形上存在复结构和度量结构且两者间相容并满足一定的条件. 而 Calabi 引入的 HyperKähler 流形在度量结构之外存在三个特定的复结构, 三者之间满足四元数关系或者说两两反交换. 由是观之, HyperKähler 流形应当与四元数 $\mathbb{H}$ 强烈相关. 诚然这是一个极好的切入点, 对 HyperKähler 流形人们有相当丰富的观点. 但为保持行文连贯不必引入这样的间奏, 故而用一种与本文关系相对较大的方式来考虑, 而非去过度剖析四元数的理论.

定义 2.11 四维流形 X 上的 HyperKähler 结构是一个三元组 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, 其中诸 ω_i 是 X 上的光滑闭 2-形式, 且对 X 中任一点 x 它们可以写为

$$\begin{aligned}
\omega_1 =& y_1 \wedge y_4 + y_2 \wedge y_3, \\
\omega_2 =& y_1 \wedge y_3 - y_2 \wedge y_4, \\
\omega_3 =& y_1 \wedge y_2 + y_3 \wedge y_4,
\end{aligned}$$

其中 $(y_1, \cdots, y_4)$ 是 $\mathrm{T}_x^* X$ 的定向基.

这一定义乍见无奇, 但若我们回到前面关于群 G_2 定义时所用的 3-形式, 立刻

发现有如此等式将 φ 和 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 建立关系:

$$\varphi = \omega_1 \wedge y_5 + \omega_2 \wedge y_6 + \omega_3 \wedge y_7 + y_5 \wedge y_6 \wedge y_7.$$

可见前面四个坐标和后面三个坐标在某种意义上被剥离开来了, 和上一节末尾提及的 $7 = 4 + 3$ 的想法一致, 将来也确实会通过调节和估计诸 ω_i 来影响 φ.

四元数 $\mathbb{H}$ 配合欧氏度量提供了一个平凡的例子, 而第一个非平凡的例子来自于物理学家 Eguchi 和 Hanson 研究广义相对论所得, 具体内容详见于原论文[16]. 他们所探索的称之为自对偶欧氏引力, 满足 Einstein 场方程的同时在物理上还要求无穷远渐近平坦. 其结果完全可以如同其他广义相对论的空间一样写出度规然后计算所有相关的量. 然这非物理学的文本, 选用相对数学的方式来刻画更为直接与切中要害.

从 $\mathbb{C}^2$ 出发, 这里直接配备复坐标. 定义 $-\mathrm{id}$ 为反射 $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$, 考虑商空间 $\mathbb{C}^2/\langle -\mathrm{id} \rangle$. 此时 $(0, 0)$ 成为一个奇点, 要执行 Blow-up 来消去: 通过计算转移函数可知 Blow-up 后的流形 X 就是 $\mathbb{CP}^1$ 上的线丛 $\mathcal{O}(-2)$, 即双全纯同构于余切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1$.

形式 $\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$ 显见可以在商空间 $\mathbb{C}^2/\langle -\mathrm{id} \rangle$ 上良好定义, 因而允许提升到 X 上. 则 HyperKähler 结构定义中的两个闭形式 ω_2 和 ω_3 通过 $\omega_2 + i\omega_3 = \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$ 定义. 凭依此理, 函数 $u = |z_1|^2 + |z_2|^2$ 也同样因为可以定义在商空间上从而提升到 X 上. 暂取正实数 t 固定, 定义 X 上的函数 f 为

$$f = \sqrt{u^2 + t^4} + t^2 \log u - t^2 \log(\sqrt{u^2 + t^4} + t^2).$$

以此作 Kähler 势, 定义

$$\omega_1 = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} f.$$

可以验证 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 定义了 X 上的 HyperKähler 结构.

繁杂但不困难的计算可以说明 X 上的度量 g_t 在无穷远处的行为约是 $g_0 + O(t^4 u^{-2})$, 其中 g_0 是原本 $\mathbb{C}^2$ 上的平坦度量, 也对应于 $t = 0$ 时的 g_t: 这便是所谓的无穷远渐近平坦. 同时可计算得, 诸 ω_i 与平坦时也只相差 $O(t^4 u^{-2})$.

现在来介绍 Kummer 构造本身. 其起手是四维环面 T^4, 视为 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. 定义其上的反射 σ 为坐标取相反数, 即 $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$. 易见 σ 有 16 个不动点, 这些不动点在商完后会变成奇点. 可以注意到, 这些奇点在 $T^4/\langle \sigma \rangle$ 中的境况和 0 在 $\mathbb{C}^2/\langle -\mathrm{id} \rangle$ 中是一样的.

记 Y 为 $T^4/\langle\sigma\rangle$ 的 Blow-up. 由上文知道这些原先的奇点附近将类似于 Eguchi-Hanson 空间, 或如大部分著作一样宣称为把 Y 视为 $T^4/\langle\sigma\rangle$ 被粘上了 16 份 X. 大致把 Y 上的结构以类似的语言道来: 离奇点较远的部分可以使用 T^4 原本的平坦 HyperKähler 结构, 而奇点附近用以 Eguchi-Hanson 空间上的 HyperKähler 结构, 欠缺的是两者的衔接. 通过对自然语言中较远区域和附近区域的良好划分, 以及 Eguchi-Hanson 空间本身无穷远渐近平坦的性质, 可令衔接区域两个边缘的诸 ω_i 只相差 $O(t^4)$. 强力的分析工具由此介入, 可以证明当 t 充分小时挠率也充分小, 从而形变到无挠 SU(2)-结构.

正文部分将几乎复刻这一流程, 但所有细节都会被一一展示.

第三章　流形的构造

第一节　构造流程的介绍

本章的全部精神都在 Kummer 构造中完全展示了, 现在不过是对细节的展示. 与上一节的内容共读, 两相对比, 可见即便是创新也无法造出真正的空中楼阁, 总有可以回归历史的一部分, 也同时凸显核心部分的熠熠生辉.

考虑的空间是 T^7 商去一个 SO(7) 的有限子群 $\varGamma \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ 的商空间. 一般而言这并不一定是一个流形, 因而要执行 Blow-up 操作来去除奇点. 具体来说 $T^7/\varGamma$ 的奇点都是一些 T^3 而奇点周围形如 $T^3 \times (B^4/\langle -\mathrm{id}\rangle)$. 此后把 Blow-up 得到的流形划分为三区: 在良好的部分赋予自然且固定的 G_2-结构, 或平坦或典范; 在过渡区域给予一族以 t 为参数的 G_2 -结构, 且满足 $\mathrm{d}\varphi_t = 0$ 和 $\mathrm{d} * \varphi_t = O(t^4)$.

然而以代数几何的立场衡量, 必须承认 Kummer 构造与这一构造有本质的不同. 关乎代数几何的抓手——复结构, 并不存在于 G_2 相关的整体性问题中. 代数和分析的合流在别处大获成功, 然而此处的分析不得不独自承担推动证明前进的任务, 也许不过再多一点表示论.

第二节　T^7 上的有限群作用

视 T^7 为 $\mathbb{R}^7/\mathbb{Z}^7$ 并赋予坐标 $(x_1, \cdots, x_7)$, 并且每个 x_i 取值在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中. 构造如下三个具体的作用:

$$\begin{aligned}
\alpha((x_1, \cdots, x_7)) &= (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, x_5, x_6, x_7),\\
\beta((x_1, \cdots, x_7)) &= (-x_1, \frac{1}{2} - x_2, x_3, x_4, -x_5, -x_6, x_7),\\
\gamma((x_1, \cdots, x_7)) &= (\frac{1}{2} - x_1, x_2, \frac{1}{2} - x_3, x_4, -x_5, x_6, -x_7).
\end{aligned}$$

在 T^7 上取典范定义的 $\hat{\varphi} \in \varLambda^3_+ T^7$, 对符号精准的选取使得这三个作用均保持 $\hat{\varphi}$ 不动. 同时它们之间两两交换, 任一作用两次之后均为 id. 由此

$$\varGamma = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

保持 T^7 上典范的平坦 G_2-结构 $\hat{\varphi}$.

记 S 为 $T^7/\varGamma$ 之奇点集合, 本节的目标是为刻画之.

引理 3.1　群 $\varGamma$ 的元素 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ 与 $\alpha\beta\gamma$ 均无不动点. 而 $\varGamma$ 中的 α, β 和 γ 任一一者在 T^7 上的不动点是 16 份 T^3, 且剩下两个元素生成的子群总可以自由作

用到这 16 个 T^3 上.

证明 本引理的证明无非计算. 元素 α 必定平移 x_2-坐标, 因而无不动点. 同凭此理, 余下的 $\beta\gamma$ 平移了 x_1-坐标, 而 $\gamma\alpha$ 和 $\alpha\beta\gamma$ 均平移了 x_3-坐标.

下一部分的证明以 α 为样板, 余下为平凡的类推. 由定义见 α 不变动 x_5, x_6 及 x_7, 而其不动点的前四个坐标独立地可以选取 0 或 1/2, 故而有 16 种选择, 对应于 16 份 T^3. 考察 $\langle\beta,\gamma\rangle$ 对这堆 T^3 的作用. 易见 β 的作用保持除 x_2 外的坐标, 将 x_2 推动 1/2; 而 γ 仅将 x_1 和 x_3 推动 1/2. 总之, 作用的自由性可以保证. ∎

可以见到如斯具体的引理完全取决于诸作用精巧的选取, 任一系数的改变都难达成如今的效果. 但另一方面, 仅仅此部分也并非困难到如同天赐. 其核心思想仍然是前文中的作维数的分解, 使得不动点恰好形如 T^3 或诸多 T^3 且不动点的邻域形如 $T^3 \times (B^4/\langle -\mathrm{id}\rangle)$. 至于这些数字的取值并非绝对, 诸如 16 这样的数字不会改变真正的分析. 此处以定义推广的 Kummer 构造明之.

定义 3.1 四元组 $(n, \varGamma, M, \pi)$ 称为推广的 Kummer 构造, 若: 群 $\varGamma$ 是 $\mathrm{SO}(n)$ 的有限子群, 作用于 T^n 上, 存有商空间 $T^7/\varGamma$ 的奇点集 S; 映照 π 为 n 维紧流形 M 到 $T^n/\varGamma$ 的连续满映射, 在 $S \subset T^n/\varGamma$ 之外具有光滑性, 在 $\pi^{-1}(M\backslash S)$ 上是单射, 而 $\pi^{-1}(S)$ 为 M 中有限个紧子流形之并, 且额外要求对任取 $s \in S$, 原像 $\pi^{-1}(\{s\})$ 为有限个连通单连通的紧子流形之并.

本节以完全刻画 S 的命题结束, 不作过多评述.

命题 3.2 商 $T^7/\varGamma$ 的奇点集 S 为不交的 12 份 T^3; 存在一 S 的开邻域 U, 使得其 12 个连通分支均等距同构于 $T^3 \times (B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle)$, 其中 r 为一固定正实数.

证明 所谓奇点集 S 不过 T^7 在 $\varGamma$ 作用下不动点通过商映射的像. 上述引理告知 $\varGamma$ 可以产生 48 份 T^3 的不动点, 且显见不交. 任一 T^3 可与额外 3 份互相迁动, 即该 4 份 T^3 的像会映至单个 T^3, 共 12 份 T^3.

另一方面, 原 $\varGamma$ 在 T^7 上作用的不动点, 除去 T^3 的部分后坐标的取值被严格限制于 $\{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$ 中. 例取 $r = 1/9$ 从而诸不动点形如 $T^3 \times B_r^4$ 的邻域在 T^7 中不交. 任取一被 α 固定的 T^3 观察, 余下坐标的 α-作用均出现负号, 故商映射下邻域变为 $T^3 \times (B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle)$. 将 α 更替为 β 或 γ 亦有此言, 明所欲证. ∎

第三节 流形 M 与一族 G_2-结构的定义

回忆道 T^7 上平坦 G_2-结构可以由

$$\hat{\varphi} = \hat{\omega}_1 \wedge \delta_1 + \hat{\omega}_2 \wedge \delta_2 + \hat{\omega}_3 \wedge \delta_3 + \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3$$

定义, 其中诸 δ_i 是常正交余切向量场, 诸 $\hat{\omega}_i$ 仿定义2.11所写. 由于无挠的方程组涉及 Hodge $*$-算子, 因此还当给出下式

$$*\hat{\varphi} = \hat{\omega}_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \hat{\omega}_2 \wedge \delta_3 \wedge \delta_1 + \hat{\omega}_3 \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 + \frac{1}{2}\hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_1.$$

在本节中应当时刻牢记诸多流形的构造粘连中, 其上的 G_2-结构也要被考虑. 具体说来, 是 T^7/Γ 摘去奇点的过程. 邻域 U 的因子 $B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle$ 应当被换成一个四维流形 X, 且边界上可以接入 T^7/Γ 的余下部分. 此处的相连不仅是拓扑上的, 更对 G_2-结构提出要求.

对 X 的构造流程与 Eguchi-Hanson 空间的构造别无二致. 视 B_r^4 为 $\mathbb{C}^2$ 中的开球, 则 X 是为 $B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle$ 的 Blow-up. 仍然有 $\omega_2 + i\omega_3 = \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$, 此处暂且没有联结的问题.

同样定义 $u = |z_1|^2 + |z_2|^2$, 此处却不可如前述构造, 原因在于当 u 大过 r^2 后必应平坦, 但渐近平坦意味着要奔向无穷远. 今之视昔, 方程中的截断函数技术在此使用再合适不过. 定义 $\eta : [0, r^2] \to [0, 1]$ 光滑递减函数, 且 $\eta(u) = 1$ 当 $u \leqslant r^2/4$, 及 $\eta(u) = 0$ 当 $u \geqslant r^2/2$. 正实数 t 令为参数, 取函数

$$f_t = \sqrt{u^2 + \eta(u)^2 t^4} + \eta(u)t^2 \log u - \eta(u)t^2 \log(\sqrt{u^2 + \eta(u)^2 t^4} + \eta(u)t^2).$$

以资为 Kähler 势, 定义

$$\omega_1(t) = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} f_t.$$

截断函数 η 的存在使得 u 较小时保有 Eguchi-Hanson 空间上的 HyperKähler 结构, 而 u 较大更贴近边界时回归平坦. 但截断函数也并非没有代价, 在方程中使用截断函数的结果早已司空见惯, 今同样将面对由此引发的新问题. 不论如何, 首务在于立即把最终的流形 M 构造阐明.

通过把 T^7/Γ 中诸奇点集附近的 $T^3 \times B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle$ 替换为 $T^3 \times X$ 得到紧致无边且无奇点的七维流形 M, 定义其上的 G_2-结构: 在 $(T^7/\Gamma)\backslash U$ 上定义 $\varphi_t = \hat{\varphi}$ 和 $v_t = *\hat{\varphi}$, 而余下部分

$$\begin{aligned}
\varphi_t =& \omega_1(t) \wedge \delta_1 + \omega_2 \wedge \delta_2 + \omega_3 \wedge \delta_3 + \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3, \\
v_t =& \omega_1(t) \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \omega_2 \wedge \delta_3 \wedge \delta_1 + \omega_3 \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 + \frac{1}{2}\omega_1(t) \wedge \omega_1(t).
\end{aligned}$$

检查诸定义, 至少保证 φ_t 和 ν_t 的闭性与光滑性.

先从拓扑上观察 M, 随后回到最关心也相对复杂的 G_2-结构部分.

拓扑上, 旨在明晰 M 符合引理2.15中拓扑性的条件, 如是一来便彻底只余下分析的工作, 其中的主要工作便是证明其单连通性——这将真正体现 Γ 选取的精巧. 由 Eguchi-Hanson 空间的良好性质, 存在问题的归约 $\pi_1(M) = \pi_1(T^7/\Gamma)$.

思绪暂时远去不受限: 若 Γ 的作用是自由的, 则 π_1 将会更为庞大, 为某种半直积 $\mathbb{Z}^7 \rtimes \Gamma$; 此处作用存在不动点, 因而基本群只能是其 (正规) 子群.

由商映照 $T^7 \to T^7/\Gamma$ 诱导得满映照 $\rho : \mathbb{Z}^7 \rtimes \Gamma \to \pi_1(T^7/\Gamma)$, 目标是为该映照的核就是复杂的半直积. 省去复杂的计算, 不过列出要点几处: 观察进一步的诱导映射 $\Gamma \to (\mathbb{Z}^7 \rtimes \Gamma)/\rho(\mathbb{Z}^7)$, 该映照的核由 Γ 中有不动点的元素生成, 但 Γ 的诸生成元均有不动点, 故 $\pi_1(\mathbb{Z}^7/\Gamma) = \rho(\mathbb{Z}^7)$; 另一方面 $\rho(\mathbb{Z}^7)$ 的无挠部分完全取决于 Γ 作用到 $\mathbb{Z}^7 = \pi_1(T^7)$ 上的不动子空间, 挠部分则苛求对 S 准确的刻画.

拓扑部分目所能及的可用材料只有 Joyce 的原文[12], 其间更有一些额外的 Γ 构造的可能以及思路, 值得一读.

现在轮到分析来一锤定音了.

回忆 M 和 X 的构造, 取子集 A 为 M 中 $u \in [r^2/4, r^2/2]$ 的部分. 直观地讲, 这是 M 上粘接的部分. 具体说来, 在 $M \backslash A$ 上已经拥有 $\nu_t = \Theta(\varphi_t)$ 的良好性质, 但在 A 上甚至不能保证 φ_t 是 Λ^3_+ 的截面——所幸 Λ^3_+ 在 Λ^3 中开, 且 $t = 0$ 有天然保障, 故 t 很小时也同样落入 Λ^3_+. 同凭此理, 当 t 很小时 ν_t 和 $\Theta(\varphi_t)$ 也相距不远. 依据从前的计算, 以上所有的“差距”基本都是 $O(t^4)$ 的. 总之, 存在两个正常数 θ, D_1 使 $0 < t \leqslant \theta$ 时, 存在一个 M 上的 3-形式 ψ_t 使 $*\psi_t = \Theta(\varphi_t) - \nu_t$ 且有范数的估计 $\|\psi_t\|_{L^2} \leqslant D_1 t^4$ 和 $\|\psi_t\|_{C^2} \leqslant D_1 t^4$, 此处不论范数或 Hodge $*$-算子均由 φ_t 诱导.

对以上流程稍加反思, 截断函数 τ 是导致有挠的主因, 这意味着即便 $\mathrm{d}\varphi_t = 0$ 仍然没有 $\mathrm{d}\Theta(\varphi_t)$ 在 A 上处处消失. 故引入 ψ_t 为某种误差项, 满足 $\mathrm{d} * \psi_t = \mathrm{d}\Theta(\varphi_t)$ 且额外带有范数的估计. 同时 A 独立于 t 也不可忽视, 这将导致误差项并不会随 t 的变小而屈缩于某一同样小的区域, 而是相对均匀且整体地同时变小.

至此几何的准备臻已完善, 下一章将通过两个主定理证明 φ_t 可以形变到无挠 G_2-结构. 这也是真正的 Joyce 的论文[12]核心内容, 时至今日仍是 G_2-理论的关键技术而并未被取代, Laplacian 流的努力也大多基于此证明中的几个引理命题.

第四章　补完证明

第一节　证明流程的介绍

本章的摘要不过寥寥几字但实则颇堪玩味, 核心在于使用更丰富的 G_2 的性质以规避过于复杂的传统微分几何, 有以一巧破千钧之势.

本节一改风格, 选择先写出主要的两个定理, 然后分别评述证明的要处.

定理 4.1　令 M 为 7 维流形, 闭的 G_2-结构 φ 实现为 Λ^3_+ 的截面. 设 M 上存在 3-形式 ψ 有 $\mathrm{d}^*\psi = \mathrm{d}^*\varphi$, 且存在 $E_1, \cdots, E_5$ 为些许正常数使如下诸条成立:

(i) 范数的估计 $\|\psi\|_{L^2} \leqslant E_1 t^4$ 且 $\|\psi\|_{C^{1,1/2}} \leqslant E_1 t^4$;

(ii) 任取截面 $\xi \in C^{1,1/2}(\Lambda^3\mathrm{T}^*M)$ 且 ξ 闭, 则 $\|\xi\|_{C^0} \leqslant E_2(t\|\nabla\xi\|_{C^0} + t^{-7/2}\|\xi\|_{L^2})$ 且 $\|\nabla\xi\|_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\xi]_{1/2} \leqslant E_3(\|\mathrm{d}^*\xi\|_{C^0} + t^{1/2}[\mathrm{d}^*\xi]_{1/2} + t^{-9/2}\|\xi\|_{L^2})$;

(iii) 体积有下界 $1 \leqslant E_4\mathrm{vol}(M)$;

(iv) 若光滑实函数 f 在 M 上的积分为 0, 则 $\|f\|_{L^2} \leqslant E_5\|\mathrm{d}f\|_{L^2}$.

则本定理宣称存在 κ, K 两正常数仅取决于诸 E_i, 使 $0 < t \leqslant \kappa$ 时, 存在光滑 2-形式 $\eta \in C^\infty(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 辅以 $\|\mathrm{d}\eta\|_{C^0} \leqslant Kt^{1/2}$ 满足 $\varphi + \mathrm{d}\eta$ 是光滑无挠 G_2-结构.

定理 4.2　与定理4.1有一致的初始设定, 且存在 $D_1, \cdots, D_5$ 为些许正常数使以下诸条可以成立:

(i) 范数的估计 $\|\psi\|_{L^2} \leqslant E_1 t^4$ 且 $\|\psi\|_{C^{1,1/2}} \leqslant E_1 t^4$;

(ii) 内射半径 $\delta(g)$ 满足 $\delta(g) \geqslant D_2 t$;

(iii) Riemann 曲率 $R(g)$ 有 $\|R(g)\|_{C^0} \leqslant D_3 t^{-2}$;

(iv) 体积有下界 $\mathrm{vol}(M) \geqslant D_4$;

(v) 直径有上界 $\mathrm{diam}(M) \leqslant D_5$.

则存在诸 E_i 使得定理4.1的条件 (i)-(iv) 成立.

可见逻辑结构基本上是由定理4.2往定理4.1走. 惊讶之处在定理4.2的条件几乎弱到不需要 G_2-结构本身, 由以 (ii)-(v) 为甚, 只依赖于其诱导的度规 g 的性质. 利用 Eguchi-Hanson 空间的基本性质, 知定理4.2的条件对构造的 M 全部满足.

对定理4.1其初始直观便是对 φ 产生形变. 由于 $\mathrm{d}\varphi$ 已经为 0 了, 因此寻求 η 一个 2-形式, 以 $\varphi + \mathrm{d}\eta$ 的方式书写形变保持闭性. 无挠的另一方程由此变化为

$$\mathrm{d}\Theta(\varphi + \mathrm{d}\eta) = 0.$$

但很遗憾这并不是一个很好处理的方程, 立刻会在下一节中说明该方程对 η 的线

性化并不具有椭圆性. 大多时候这里的非椭圆性来自于方程的微分同胚不变性——这里的话题十分值得更深入的讨论, 但与主题相去甚远, 不得不割舍.

此处的处理手法展示了 Joyce 的宏大构思. 添加一额外的实数 ϵ 以及对方程的改写, 通过对 G_2 几何性质的透彻了解, 找到 η 和 ϵ 满足一非线性但线性化却具有椭圆性的方程. 而后在标准的 Picard 迭代技术帮助下找到该方程的解, 并证明该 η 可以带来无挠性. 寻求额外的条件的动机可以解释为对规范进行固定, 预期效果为大幅减少可取的微分同胚, 剑指有限维的解空间.

言尽于此, 更细节的评注留到证明中适时观照, 现已是开启证明的良好时机. 诚如本节开头所言, 下一节的首要引理是对进一步对 G_2 的性质的刻画.

第二节　向无挠形变

本节将奔定理4.1长驱直入. 首个引理着墨于对函数 Θ 进行进一步的估计.

引理 4.3　设 M 为七维流形与其上的闭 G_2-结构 φ. 存在正常数 e_1 使得对任意截面 $\chi \in C^0(\Lambda^3 T^*M)$ 且 $\|\chi\|_{C^0} \leqslant e_1$, 有 $\varphi+\chi$ 仍落入 $C^0(\Lambda^3 T^*M)$ 且 $\Theta(\varphi+\chi)$ 的一阶展开如下

$$\Theta(\varphi+\chi) = *\varphi + \frac{4}{3} * \pi_1(\chi) + *\pi_7(\chi) - *\pi_{27}(\chi) - F(\chi),$$

其中 F 是定义在 $\Lambda^3 T^*M$ 上一个半径为 e_1 的闭球到 $\Lambda^4 T^*M$ 的光滑函数, 额外要求 $F(0)=0$; 其中的 $*$-算子还是由 φ 所诱导的.

证明　观察到 F 本身不过一阶项后的余项, 本引理的非平凡部分全部位于前面部分. 为了在形式上不受 F 的干扰, 上式可复写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta(\varphi(t))\Big|_{t=0} = \frac{4}{3} * \pi_1\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right) + *\pi_7\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right) - *\pi_{27}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

这一计算已经为著作[3]所写, 且仍然涉及较为艰深的表示论内容, 因而只得以思路介绍为主. 前文已经称道过 Θ 在代数立场上给出了表示的同态, 因而 Schur 引理迫使该映照实则只能给出同维不可约表示之间的线性伸缩. 由此不妨令 χ 只取到各个不可约的子空间中来研究.

回忆 Λ^3_1 不过 $\mathbb{R}\varphi$ 而已, 故令 $\varphi(t) = (1+t)\varphi$, 通过计算 g 和 $*$-算子得 $\Theta(\varphi(t)) = (1+t)^{4/3} * \varphi$, 求导已明. 七维分量更是显见, 从构造中可窥见这一部分的作用甚至不改变度规本身, 故而 Θ 在这里仍旧保持了良好的线性. 余下的 27 维部分需具体写出 Λ^3_{27} 到 S^2_0 的同构, 推荐参考 Bryant 的综述文[17]而此处承认系数为 -1. ∎

透过此计算性的引理明确了算子 Θ 具有的双曲性, 呈露了主要的困难. 切勿心急于立刻进入对定理4.1的证明, 不妨沿此引理再提供一引理以展示蕴藏在函数 F 的定义后的一些估计.

引理 4.4 诸记号如前所述, 设 χ 和 ξ 为 $\Lambda^3\mathrm{T}^*M$ 的 $C^{1,1/2}$-截面, 且辅以要求 $\|\chi\|_{C^0}, \|\xi\|_{C^0} \leqslant e_1$. 则对 $F(\chi) - F(\xi)$ 有如下的三个不等式估计:

$$|F(\chi) - F(\xi)| \leqslant e_2|\chi - \xi|(|\chi| + |\xi|),$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}(F(\chi) - F(\xi))| \leqslant e_3\big(&|\chi - \xi|(|\chi| + |\xi|)|\mathrm{d}^*\varphi| + |\nabla(\chi - \xi)|(|\chi + \xi|)\\ &+|\xi - \chi|(|\nabla\chi| + |\nabla\xi|)\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}(F(\chi) - F(\xi))]_{1/2} \leqslant e_4\big(&[\chi - \xi]_{1/2}(\|\chi\|_{C^0} + \|\xi\|_{C^0})\|\mathrm{d}^*\varphi\|_{C^0}\\ &+\|\chi - \xi\|_{C^0}([\chi]_{1/2} + [\xi]_{1/2})\|\mathrm{d}^*\varphi\|_{C^0}\\ &+\|\chi - \xi\|_{C^0}(\|\chi\|_{C^0} + \|\xi\|_{C^0})[\mathrm{d}^*\varphi]_{1/2}\\ &+[\nabla(\chi - \xi)]_{1/2}(\|\chi\|_{C^0} + \|\xi\|_{C^0})\\ &+\|\nabla(\chi - \xi)\|_{C^0}([\chi]_{1/2} + [\xi]_{1/2})\\ &+[\chi - \xi]_{1/2}(\|\nabla\chi\|_{C^0} + \|\nabla\xi\|_{C^0})\\ &+\|\chi - \xi\|_{C^0}([\nabla\chi]_{1/2} + [\nabla\xi]_{1/2})\big),\end{aligned}$$

其中 e_2, e_3, e_4 为普适的正常数.

证明 初见式子之复杂令人惊讶, 千头万绪, 从头评说.

回忆道上一引理告知了 $F(\chi)$ 的主部是为 χ 的二次型, 所以第一个不等式确该成立. 由链式法则, 引入额外的函数 F_1 和 F_2 将 $\mathrm{d}F(\chi)$ 表作 $F_1(\chi, \nabla\varphi) + F_2(\chi, \nabla\chi)$, 其中诸 F_i 对第二个变量线性. 从细节观之, 两 F_i 又有所不同, 譬如 F_1 对第一个变量保持了二次型的主部, 因并未对 χ 求到导; 而 F_2 不得不只余下对第一个变量第一阶的估计. 加上 $\mathrm{d}\varphi = 0$ 的引理假设, 使 $\nabla\varphi$ 只取决于 $\mathrm{d}^*\varphi$. 综之, 在 F_1 和 F_2 的辅助下第二个不等式也令人信服. 第三个不等式涉及对 Hölder 范数的估计, 这自然只需对每一项分别估计再求和, 正如所写. ∎

准备迄今, 应当于此引进证明的要点. 要探求 $\eta \in C^\infty(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 和 $\epsilon \in \mathbb{R}$ 使

$$\mathrm{d}^*\eta = 0, \epsilon = \frac{1}{3\mathrm{vol}(M)}\int_M \mathrm{d}\eta \wedge *\psi$$

及

$$\mathrm{d}\Theta(\varphi + \mathrm{d}\eta) = \frac{7}{3}\mathrm{d}(*\pi_1(\mathrm{d}\eta)) + 2\mathrm{d}(*\pi_7(\mathrm{d}\eta)) - \epsilon\mathrm{d} * \varphi$$

成立, 尔后说明 η 确为定理4.1之所求. 另一方面引理4.3告知了

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)=&\mathrm{d}*\varphi+\frac{4}{3}\mathrm{d}(*\pi_1(\mathrm{d}\eta))+\mathrm{d}(*\pi_7(\mathrm{d}\eta))-\mathrm{d}(*\pi_{27}(\mathrm{d}\eta))-\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta)\\=&\mathrm{d}*\varphi-\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta)-\mathrm{d}(*\mathrm{d}\eta)+\frac{7}{3}\mathrm{d}(*\pi_1(\mathrm{d}\eta))+2\mathrm{d}(*\pi_7(\mathrm{d}\eta)),\end{aligned}$$

其中利用了 $\mathrm{id}=\pi_1+\pi_7+\pi_{27}$. 因而前文的方程化为

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta=(1+\epsilon)\mathrm{d}^*\psi+*\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta),$$

其间用以约定 $\mathrm{d}^*=-*\mathrm{d}*$ 与定理条件 $\mathrm{d}^*\psi=\mathrm{d}^*\varphi$.

如今目标摆在面前, 是纯分析大展身手的时机. 标准的迭代手段为构造一列收敛的 (η_j), 选取恰当的范数保持诸 η_j 的范数受到良好控制, 椭圆性带来 Schauder 估计及保证迭代中不损失正则性——这一部分反而并无本质困难或曲折思路, 因而也不多加铺排, 直接痛快开场.

命题 4.5 保持 t 充分小, 诸假设与定理4.1一致. 存在一列于 $C^{2,1/2}(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 中收敛的 (η_j) 与实直线上的一列收敛的 ϵ, 辅以 $\eta_0=\epsilon_0=0$ 且满足

$$\mathrm{d}^*\eta_j=0,\epsilon=\frac{1}{3\mathrm{vol}(M)}\int_M\mathrm{d}\eta_j\wedge*\psi,$$

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta_j=(1+\epsilon_{j-1})\mathrm{d}^*\psi+*\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta_{j-1}).$$

对于任意的 j 还有诸不等式估计:

(a) $\|\mathrm{d}\eta_j\|_{L^2}\leqslant 2E_1t^4$, (b) $|\epsilon_j|\leqslant E_6t^8$, (c) $\|\mathrm{d}\eta_j\|_{C^0}\leqslant Kt^{1/2}$,

(d) $\|\nabla\mathrm{d}\eta_j\|_{C^0}\leqslant E_7t^{-1/2}$, (e) $[\nabla\mathrm{d}\eta_j]_{1/2}\leqslant E_7t^{-1}$,

(A) $\|\mathrm{d}\eta_j-\mathrm{d}\eta_{j-1}\|_{L^2}\leqslant 2E_12^{-j}t^4$, (B) $|\epsilon_j-\epsilon_{j-1}|\leqslant E_62^{-j}t^8$,

(C) $\|\mathrm{d}\eta_j-\mathrm{d}\eta_{j-1}\|_{C^0}\leqslant K2^{-j}t^{1/2}$, (D) $\|\nabla\mathrm{d}\eta_j-\nabla\mathrm{d}\eta_{j-1}\|_{C^0}\leqslant E_72^{-j}t^{-1/2}$,

(E) $[\nabla\mathrm{d}\eta_j-\nabla\mathrm{d}\eta_{j-1}]_{1/2}\leqslant E_72^{-j}t^{-1}$,

其中 E_6,E_7 与 K 只取决于 $E_1,\cdots,E_5$. 则取极限的 η 和 ϵ 将符合诸方程, 且额外有估计 $\|\mathrm{d}\eta\|_{C^0}\leqslant Kt^{1/2}\leqslant e_1$.

证明 Laplace 算子 $\Delta=\mathrm{d}^*\mathrm{d}+\mathrm{d}\mathrm{d}^*\in\mathrm{End}(C^\infty(\Lambda^2\mathrm{T}^*M))$ 为经典的自伴椭圆算子, 由 Hodge 分解定理知其核 W 同构于 $H^2(M,\mathbb{R})$. 记 $W^\perp$ 为 W 在 Hilbert 空间 $L^2(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 的正交补. 由自伴性知 $W^\perp=\mathrm{Im}\Delta$. 故取 $\xi\in W^\perp$ 总存在唯一的 $\chi\in W^\perp$ 满足 $\Delta\chi=\xi$. 据命题2.16知晓存在常数 $C(\varphi)$ 只取决于 φ 使 $\|\chi\|_{C^{2,1/2}}\leqslant C(\varphi)\|\xi\|_{C^{0,1/2}}$. 证明将使用归纳法完成. 第一步是平凡的, 一切流程的开始不过是两个 0. 现设 $\eta_0,\cdots,\eta_k$ 与 $\epsilon_0,\cdots,\epsilon_k$ 已经依命题实现, 则不等式 $\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}\leqslant Kt^{1/2}\leqslant e_1$ 保证了 $F(\mathrm{d}\eta_k)$ 这一项良好定义.

另一方面, 分部积分可见 $(1+\epsilon_k)\mathrm{d}^*\psi + *\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta_k) \in W^\perp$ 因闭流形上形式调和当且仅当闭且余闭. 故存在唯一 $\eta_{k+1} \in$ 使 $\Delta\eta_{k+1} = (1+\epsilon_k)\mathrm{d}^*\psi + *\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta_k)$. 此外瞥一眼于正则性的问题: 由 $\eta_k \in C^{2,1/2}$ 从而等式右部有 $C^{0,1/2}$ 的正则性, 椭圆性将 η_{k+1} 正则性提升回 $C^{2,1/2}$, 及提供了 Schauder 估计

$$\|\eta_{k+1}\|_{C^{2,1/2}} \leqslant C(\varphi)\|(1+\epsilon_k)\mathrm{d}^*\psi + *\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta_k)\|_{C^{0,1/2}}.$$

分部积分又表明 d 与 d^* 的像是 L^2-正交的, 且知 $\Delta\eta_{k+1} \in \mathrm{Imd}^*$ 从而 $\mathrm{dd}^*\eta_{k+1} = 0$. 内积上 η_{k+1} 后执行分部积分知 $\mathrm{d}^*\eta_{k+1} = 0$, 方程也变化到应有的 $\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta_{k+1} = (1+\epsilon_k)\mathrm{d}^*\psi + *\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta_k)$. 按照命题中的式子定义 ϵ_{k+1}. 现在所余下的工作便在于推进所有归纳假设, 这一步将分 $k=0$ 和 $k>0$ 讨论.

首务在于论证不等式 (a)-(e) 和 (A)-(E) 对 $j=1$ 成立. 由于此时 (A)-(E) 可推出 (a)-(e) 因而只需对前者进行证明. 要而言之, 主要手段在于选取恰当的截面代入定理4.1的 (ii) 来实现证明.

由 $\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta_1 = \mathrm{d}^*\psi$ 内积上 η_1 分部积分得 $\|\mathrm{d}\eta_1\|_{L^2} \leqslant \|\psi\|_{L^2} \leqslant E_1 t^4$, 得 (A). 进而启发有如下计算

$$\begin{aligned}|\epsilon_1| \leqslant& \frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\|\mathrm{d}\eta_1\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\ \leqslant& \frac{E_4}{3}\cdot 2E_1 t^4 \cdot E_1 t^4 = E_6 t^8,\end{aligned}$$

此中 E_6 不过 $2E_4E_1^2/3$ 的再称, 得 (B). 另外由 ψ 的 $C^{1,1/2}$ 估计可知 $\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta_1 = \mathrm{d}^*\psi$ 的 $C^{0,1/2}$-范数被 $E_1 t^4$ 控制. 今令定理4.1中条件 (ii) 的 $\xi = \mathrm{d}\eta_1$, 有

$$\|\nabla\mathrm{d}\eta_1\|_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\mathrm{d}\eta_1]_{1/2} \leqslant E_3(E_1t^4 + t^{1/2}\cdot E_1t^4 + t^{-9/2}\cdot E_1t^4),$$

可见 t 充分小时, 右边的主项在于 $t^{-1/2}$, 而前置的系数不妨随心取为 $E_7 = 3E_1E_3$, 得 (D) 与 (E); 另一条不等式是为

$$\|\mathrm{d}\eta_1\|_{C^0} \leqslant E_2(t\cdot E_7 t^{-1/2} + t^{-7/2}E_1t^4),$$

则置 $K = 2E_2(E_7+E_1)$ 得 (C).

迈入第二步, 取 $k \geqslant 1$ 而 $j = k+1$. 在计算前对待证内容观察少许是有所裨益的, 与第一步相似之处在于 (a)-(e) 仍然通过三角不等式被 (A)-(E) 简单导出, 故仍仅聚焦于后五条的证明. 对命题中的式子差分得

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}(\eta_{k+1}-\eta_k) = (\epsilon_k - \epsilon_{k-1})\mathrm{d}^*\psi + *\mathrm{d}(F(\mathrm{d}\eta_k) - F(\mathrm{d}\eta_{k-1})),$$

内积上 $\eta_{k+1}-\eta_k$ 如法炮制分部积分得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}\eta_{k+1}-\mathrm{d}\eta_k\|_{L^2}\leqslant&|\epsilon_k-\epsilon_{k-1}|\|\psi\|_{L^2}+\|F(\mathrm{d}\eta_k)-F(\mathrm{d}\eta_{k-1})\|_{L^2}\\ \leqslant&|\epsilon_k-\epsilon_{k-1}|\|\psi\|_{L^2}+e_2\|\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{L^2}(\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\\ \leqslant&E_6 2^{-k}t^8\cdot E_1t^4+e_2\cdot 2E_1 2^{-k}t^4\cdot 2Kt^{1/2}\leqslant 2E_1 2^{-j}t^4,\end{aligned}$$

其中已经使用了引理4.4里的结果, 以及通过取一个无关于 k 的 κ 使得不等式链的最后一个不等号在 $t\leqslant\kappa$ 下可以通过, 得 (A).

对 (C)-(E) 的证明核心显然在于取 $\xi=\mathrm{d}(\eta_{k+1}-\eta_k)$ 代入定理4.1的 (ii) 中. 简单观察见只需找到 $\|\mathrm{d}^*\mathrm{d}(\eta_{k+1}-\eta_k)\|_{C^0}$ 和 $[\mathrm{d}^*\mathrm{d}(\eta_{k+1}-\eta_k)]_{1/2}$ 的估计即可. 先套予 C^0-范数有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}\eta_{k+1}-\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}\leqslant&|\epsilon_k-\epsilon_{k-1}|\|\psi\|_{C^1}+\|F(\mathrm{d}\eta_k)-F(\mathrm{d}\eta_{k-1})\|_{C^0}\\ \leqslant&|\epsilon_k-\epsilon_{k-1}|\|\psi\|_{C^1}\\ &+e_3\big(\|\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0}(\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\|\psi\|_{C^1}\\ &+\|\nabla\mathrm{d}(\eta_k-\eta_{k-1})\|_{C^0}(\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\\ &+\|\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0}(\|\nabla\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\nabla\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\big)\\ \leqslant&E_6 2^{-k}t^8\cdot E_1t^4+e_3(K2^{-k}t^{1/2}\cdot 2Kt^{1/2}\cdot E_1t^4\\ &+E_7 2^{-k}t^{-1/2}\cdot 2Kt^{1/2}+2E_1 2^{-k}t^4\cdot 2E_7t^{-1/2})\\ =&O(2^{-k}),\end{aligned}$$

第二个不等号同样借助了引理4.4中的不等式, 最后 t 幂次最低可为 0, 故可粗糙地把 $\|\mathrm{d}^*\mathrm{d}(\eta_{k+1}-\eta_k)\|_{C^0}$ 估计为 $O(2^{-k})$. 转向研究其 1/2-阶 Hölder 的信息, 估计有

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}\eta_{k+1}-\mathrm{d}\eta_k]_{1/2}\leqslant&|\epsilon_k-\epsilon_{k-1}|\|\psi\|_{C^{1,1/2}}+[F(\mathrm{d}\eta_k)-F(\mathrm{d}\eta_{k-1})]_{1/2}\\ \leqslant&|\epsilon_k-\epsilon_{k-1}|\|\psi\|_{C^{1,1/2}}\\ &+e_4\big([\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2}(\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\|\psi\|_{C^1}\\ &+\|\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0}([\mathrm{d}\eta_k]_{1/2}+[\mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2})\|\psi\|_{C^1}\\ &+\|\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0}(\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\|\psi\|_{C^{1,1/2}}\\ &+[\nabla\mathrm{d}(\eta_k-\eta_{k-1})]_{1/2}(\|\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\\ &+\|\nabla\mathrm{d}(\eta_k-\eta_{k-1})\|_{C^0}([\mathrm{d}\eta_k]_{1/2}+[\mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2})\\ &+[\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2}(\|\nabla\mathrm{d}\eta_k\|_{C^0}+\|\nabla\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0})\\ &+\|\mathrm{d}\eta_k-\mathrm{d}\eta_{k-1}\|_{C^0}([\nabla\mathrm{d}\eta_k]_{1/2}+[\nabla\mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2})\big).\end{aligned}$$

这里肉眼可见有形如 $[\mathrm{d}\eta_k]_{1/2}$ 和 $[\mathrm{d}\eta_k - \mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2}$ 这样的非常规项, 从归纳假设中无法直接得到. 插值不等式派上用场, 对截面 χ 有 $[\chi]_{1/2}^2 \leqslant 2\|\chi\|_{C^0}\|\nabla\chi\|_{C^0}$, 故而知 $[\mathrm{d}\eta_k]_{1/2} \leqslant O(1)$ 及 $[\mathrm{d}\eta_k - \mathrm{d}\eta_{k-1}]_{1/2} \leqslant O(2^{-k})$. 有此简单的准备, 代入上式可见每一项均有 2^{-k} 而 t 的幂次最低为 $-1/2$. 故最终可宣布繁杂的计算成果为 $[\mathrm{d}\eta_{k+1} - \mathrm{d}\eta_k]_{1/2}$ 被 $O(2^{-k}t^{-1/2})$ 控制. 回代可得 (C)-(E).

最后对 ϵ 的定义式差分, 计算得 (B) 如下

$$
\begin{aligned}
|\epsilon_{k+1} - \epsilon_k| \leqslant & \frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\|\mathrm{d}\eta_{k+1} - \mathrm{d}\eta_k\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
\leqslant & \frac{E_4}{3} \cdot 2E_1 2^{-j} t^4 \cdot E_1 t^4 \leqslant E_6 2^{-j} t^8.
\end{aligned}
$$

归纳的部分已然完成. 因 $\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta_j$ 在 $C^{0,1/2}(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 中收敛且 η_j 保持为余闭形式, 故 $\Delta\eta_j$ 同在 $C^{0,1/2}(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 中收敛. 利用前文的 Schauder 估计可进一步知晓 η_j 在 $C^{2,1/2}(\Lambda^2\mathrm{T}^*M)$ 中收敛至 η. 当然, 还有 ϵ_j 收敛至 ϵ, 且 (a)-(e) 被予以保持. ■

显见尚欠缺对 η 的正则性提升, 列为如下命题.

命题 4.6 令 M, φ, η 和 ϵ 均为上文所指, 则 η 光滑.

证明 对椭圆方程的正则性提升实为完全标准化的流程. 已知 η 满足方程

$$
\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta = (1+\epsilon)\mathrm{d}^*\psi + *\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta)
$$

后, 在左方补足 $\mathrm{d}\mathrm{d}^*\eta$ 且把引理4.4证明中的 F_2 从右方拆出 $\nabla\mathrm{d}\eta$ 整理为

$$
\Delta\eta + P(\mathrm{d}\eta, \nabla\mathrm{d}\eta) = G(\epsilon, \mathrm{d}^*\varphi, \mathrm{d}\eta).
$$

由于 F 的良好光滑性, 能保证 P 和 G 的光滑性, 且 P 还对第二个变量线性, 且当第一个变量为 0 时也为 0. 因存在对 $\mathrm{d}\eta$ 的控制, 椭圆性作为开条件可信服地宣称总可选取更小的 κ 使得 $\Delta + P$ 是椭圆算子. 这时若 $\mathrm{d}\eta$ 有 $C^{k,1/2}$ 则该椭圆算子的系数有 $C^{k,1/2}$ 级别的正则性, 故命题2.16指出 η 是 $C^{k+2,1/2}$ 的而 $\mathrm{d}\eta$ 自然升级为 $C^{k+1,1/2}$. 此过程循环往复, 令 k 奔向无穷, 即称光滑. ■

前面大量的计算铺垫终归不过为证明 $\varphi + \mathrm{d}\eta$ 的无挠性铺路而已. 因 G_2-结构的闭性被良好地保留, 故此时的目标实为说明 $\mathrm{d}\Theta(\varphi + \mathrm{d}\eta)$ 消失——注意这是一个 5-形式, 配合前置知识中的理论, 一巧法在于证明其在 π_7 和 π_{14} 两投影下均为 0. 后文将循此思路完成证明, 但证明开始前置一引理作备.

引理 4.7 令 M,φ,η 和 ϵ 如前所述. 定义如下诸截面

$$
\begin{aligned}
x_7 &= \pi_7(\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)),\ x_{14}=\pi_{14}(\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)),\\
y_7 &= \frac{7}{3}\pi_7(\mathrm{d}*\pi_1(\mathrm{d}\eta)),\ y_{14}=\frac{7}{3}\pi_{14}(\mathrm{d}*\pi_1(\mathrm{d}\eta))-\epsilon\mathrm{d}*\varphi,\\
z_7 &= 2\pi_7(\mathrm{d}*\pi_7(\mathrm{d}\eta)),\ z_{14}=2\pi_{14}(\mathrm{d}*\pi_7(\mathrm{d}\eta)).
\end{aligned}
$$

则存在充分小的 κ 使这些截面满足以下四条等式与两条不等式

$$
\begin{gathered}
x_7=y_7+z_7,\ x_{14}=y_{14}+z_{14},\\
\|z_7\|_{L^2}=\sqrt{2}\|z_{14}\|_{L^2},\ \langle x_7,z_7\rangle=2\langle x_{14},z_{14}\rangle,\\
\|x_7\|_{L^2}\leqslant\|x_{14}\|_{L^2},\ \|y_{14}\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{4}\|y_7\|_{L^2}.
\end{gathered}
$$

证明 由已知的方程

$$
\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)=\frac{7}{3}\mathrm{d}(*\pi_1(\mathrm{d}\eta))+2\mathrm{d}(*\pi_7(\mathrm{d}\eta))-\epsilon\mathrm{d}*\varphi
$$

及推论2.13显见确有 $x_7=y_7+z_7$ 与 $x_{14}=y_{14}+z_{14}$ 两等式. 另一方面, 回忆道各个不可约分量的构造, 可知存在 1-形式 ν 使

$$
\mathrm{d}*\pi_7(\mathrm{d}\eta)=\frac{1}{4}\mathrm{d}(\nu\wedge\varphi)=\frac{1}{4}\mathrm{d}\nu\wedge\varphi.
$$

故有

$$
z_7=\frac{1}{2}\pi_7(\mathrm{d}\nu)\wedge\varphi=*\pi_7(\mathrm{d}\nu),\ z_{14}=\frac{1}{2}\pi_{14}(\mathrm{d}\nu)\wedge\varphi=-\frac{1}{2}*\pi_{14}(\mathrm{d}\nu).
$$

这一小部分的内容仍推荐参阅论文[9]以信服. 综之, 有 $\mathrm{d}\nu=*z_7-2*z_{14}$. 又由 φ 的闭性见到 $\mathrm{d}\nu\wedge\mathrm{d}\nu\wedge\varphi$ 是恰当 7-形式, 则在闭流形上积分为 0. 另一方面, 计算见

$$
\mathrm{d}\nu\wedge\mathrm{d}\nu\wedge\varphi=\mathrm{d}\nu\wedge(2*\pi_7(\mathrm{d}\nu)-*\pi_{14}(\mathrm{d}\nu))=(2|\pi_7(\mathrm{d}\nu)|^2-|\pi_{14}(\mathrm{d}\nu)|^2)\mathrm{d}\mu,
$$

进而积分并辅以上式可得 $\|z_7\|_{L^2}=\sqrt{2}\|z_{14}\|_{L^2}$. 又注意 $x_7+x_{14}=\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)$ 为闭形式, 可有 $(x_7+x_{14})\wedge\mathrm{d}\nu$ 为恰当 7-形式, 代换 $\mathrm{d}\nu$ 并再次执行积分得 $\langle x_7,z_7\rangle=2\langle x_{14},z_{14}\rangle$.

第一条不等式以技巧明之. 定义 $\tilde{\varphi}=\varphi+\mathrm{d}\eta$, 以此作为 G_2-结构将 $\Lambda^5\mathrm{T}^*M$ 重新分裂为 $\tilde{\Lambda}^5_7\oplus\tilde{\Lambda}^5_{14}$. 由于保持了闭性故借助推论2.13知 $x_7+x_{14}\in C^\infty(\tilde{\Lambda}^5_{14})$. 而 $\mathrm{d}\eta\to 0$ 时 $\tilde{\Lambda}^5_{14}\to\Lambda^5_{14}$, 换言之 $\mathrm{d}\Theta(\tilde{\varphi})$ 的大部分分量应留于 Λ^5_{14} 中. 综之, 当 t 充分小时 $\mathrm{d}\eta$ 也充分小, 取更小的 κ 将有 $\|x_7\|_{L^2}\leqslant\|x_{14}\|_{L^2}$ 成立.

最后一条不等式亦需一点表示论的工具并引入辅助用函数. 由

$$\frac{7}{3}\pi_1(\mathrm{d}\eta)-\epsilon\varphi\in C^\infty(\Lambda^3_1)=\langle\varphi\rangle,$$

可令之恰如 $f\varphi$. 对之作用 $\mathrm{d}*$ 算得

$$\frac{7}{3}\mathrm{d}*\pi_1(\mathrm{d}\eta)-\epsilon\mathrm{d}*\varphi=\mathrm{d}f\wedge*\varphi+f\mathrm{d}*\varphi.$$

再次利用推论2.13可确定 $y_7=\mathrm{d}f\wedge*\varphi$ 与 $y_{14}=f\mathrm{d}*\varphi=f\mathrm{d}*\psi$. 局部直接计算知 $|\mathrm{d}f\wedge*\varphi|=\sqrt{3}|\mathrm{d}f|$ 故 $\|y_7\|_{L^2}=\sqrt{3}\|\mathrm{d}f\|_{L^2}$. 另一方面直接的估计展示 $\|y_{14}\|_{L^2}\leqslant\|f\|_{L^2}\|\psi\|_{C^1}$. 简要研究 f 的形态, 作流形上积分:

$$\begin{aligned}7\int_M f\mathrm{d}\mu=\int_M f\varphi\wedge*\varphi=&\frac{7}{3}\int_M\mathrm{d}\eta\wedge*\varphi-\epsilon\int_M\varphi\wedge*\varphi\\=&\frac{7}{3}\int_M\mathrm{d}\eta\wedge*\psi-7\epsilon\mathrm{vol}(M)=0.\end{aligned}$$

该计算中蕴含 Stokes 定理与诸 φ,ψ 和 ϵ 的定义. 归功于定理4.1的 (iv) 部分, 获得不等式 $\|f\|_{L^2}\leqslant E_5\|\mathrm{d}f\|_{L^2}$ 以表明

$$\|y_{14}\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}E_1E_5t^4\|y_7\|_{L^2}$$

可在 κ 再取小后得到待证的不等式. ∎

承上, 对定理的完整证明已不远.

命题 4.8 令 M,φ,η 和 ϵ 如前所述. 存在 κ 使 $\varphi+\mathrm{d}\eta$ 为无挠 G_2-结构.

证明 在引理的铺垫下, 只欠说明 $x_7=x_{14}=0$.

对 $x_7=y_7+z_7$ 使用三角不等式有 $\|y_7\|_{L^2}\leqslant\|x_7\|_{L^2}+\|z_7\|_{L^2}$, 进而有

$$\|x_{14}-z_{14}\|_{L^2}=\|y_14\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{4}\|y_7\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}(\|x_{14}\|_{L^2}+\|z_{14}\|_{L^2}).$$

此处无分析施展拳脚之地, 而是对引理4.7结果的代数游戏. 由极化恒等式有

$$\begin{aligned}2\langle x_{14},z_{14}\rangle=&\|x_{14}\|^2_{L^2}+\|z_{14}\|^2_{L^2}-\|x_{14}-z_{14}\|^2_{L^2}\\\geqslant&\|x_{14}\|^2_{L^2}+\|z_{14}\|^2_{L^2}-\frac{1}{8}(\|x_{14}\|_{L^2}+\|z_{14}\|_{L^2})^2\\=&\frac{7}{8}(\|x_{14}\|^2_{L^2}+\|z_{14}\|^2_{L^2})-\frac{1}{4}\|x_{14}\|_{L^2}\|z_{14}\|_{L^2}\\\geqslant&\frac{3}{2}\|x_{14}\|_{L^2}\|z_{14}\|_{L^2}\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}\|x_7\|_{L^2}\|z_7\|_{L^2}.\end{aligned}$$

进而可得如下不等式:

$$\|x_7\|_{L^2}\|z_7\|_{L^2} \geqslant \langle x_7, z_7\rangle = 2\langle x_{14}, z_{14}\rangle \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}\|x_7\|_{L^2}\|z_7\|_{L^2}.$$

由于系数严格大于 1, 这迫使 x_7 和 z_7 中必有一个是 0.

若 $z_7 = 0$ 则 z_{14} 亦为 0. 故两等式化为 $x_7 = y_7$ 和 $x_{14} = y_{14}$, 但

$$\|x_7\|_{L^2} \leqslant \|x_{14}\|_{L^2} = \|y_{14}\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{4}\|y_7\|_{L^2} = \frac{1}{4}\|x_7\|_{L^2}$$

迫使 $x_7 = 0$ 且不等式中所有的项均为 0, 譬如 x_{14}. 倘若是 $x_7 = 0$ 的情况, 仍可有 $y_7 = -z_7$, 故

$$\|y_{14}\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{4}\|y_7\|_{L^2} = \frac{1}{4}\|z_7\|_{L^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\|z_{14}\|_{L^2}.$$

此时可宣称 $z_{14} = 0$. 不然, 对 $x_{14} = y_{14} + z_{14}$ 点积上 z_{14} 得到的不等式

$$\frac{1}{2}\langle x_7, z_7\rangle = \langle x_{14}, z_{14}\rangle = \langle y_{14}, z_{14}\rangle + \|z_{14}\|_{L^2}^2 > 0$$

将与 $x_7 = 0$ 相矛盾. 因此 $z_7 = z_{14} = 0$, 归约到前一种情况, 明所欲证. ∎

至此圆满证毕定理4.1. 回顾证明的流程, 倒叙言之, 引理4.7中两个不等式本质地依赖了 η 与 ϵ 的构造, 且关注到背后分析的属性使其系数的调节空间不小. 不讳言, 提出在方程中添加 ϵ 从而转化为更为可解的方程实属 Joyce 的妙手. 然而作为读者依旧可以窥见一点 ϵ 的定义背后的动机, 即希望可将定理4.1中形如 Poincaré 不等式的条件应用到证明中, 必需要求在引理4.7中的一步的计算得到精准的 0 ——其他系数均已被群 G_2 的内禀信息决定, 对 ϵ 的定义是唯一的自由度.

下一节自然是证明定理4.2. 对流形细腻的处理, 将展示定理4.1中纷繁迷人眼的指数大多来自于某种共形性的结果; 而不等式本身天然出现自常规的方程理论中, 少数的阻碍是局部到整体的推广.

第三节　不等式的涌现

本节直指定理4.2的证明, 职是之故, 明晰了流形 M 的 Holonomy 群恰是 G_2.

定理4.1的诸条件中数 (ii) 形式上最复杂, 因而先制备几个与之相关的引理.

引理 4.9　存在三个正常数 F_1, F_2 和 F_3, 使任取 B_1^7 上一个 Riemann 度量 $\tilde{g}$ 与典范度量在 $C^{1,1/2}$-范数下的差小于 F_1 时, 对闭的 $\chi \in C^{1,1/2}(\Lambda^3 \mathrm{T}^* B_1^7)$ 有如下两不等式:

$$\begin{aligned}\|\chi\|_{C^0} \leqslant & F_2(\|\nabla\chi\|_{C^0} + \|\chi\|_{L^2}),\\ \|\nabla\chi|_{B_{1/2}^7}\|_{C^0} + [\nabla\chi|_{B_{1/2}^7}]_{1/2} \leqslant & F_3(\|\mathrm{d}^*\chi\|_{C^0} + [\mathrm{d}^*\chi]_{1/2} + \|\chi\|_{C^0}),\end{aligned}$$

其中 ∇ 与诸范数及 d^* 均由 $\tilde{g}$ 诱导.

证明　任取函数 $f \in C^1(B_1^7)$, 在典范度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下易有

$$\sup_{B_1^7}|f| \leqslant \inf_{B_1^7}|f| + 2\|\nabla f\|_{C^0}.$$

另一方面, 有显见的不等式 $\inf_{B_1^7}|f| \leqslant \mathrm{vol}(B_1^7)^{-1/2}\|f\|_{L^2}$; 且 L^2-范数只依赖到度量的 C^0-范数, 从 Christoffel 符号的计算公式可见协变导数也至多关系到 $\tilde{g}$ 的一阶导数. 综之, 存在充分小的 $F_1 > 0$ 和另一正常数 F_2, 当 $\|\langle\cdot,\cdot\rangle - \tilde{g}\|_{C^1} \leqslant F_1$ 时, 有

$$\|f\|_{C^0} \leqslant F_2(\|\nabla f\|_{C^0} + \|f\|_{L^2}).$$

取 $f = |\chi|$ 并注意 $|\nabla|\chi|| \leqslant |\nabla\chi|$ 便得第一条不等式.

考虑方程 $(\mathrm{d} + \mathrm{d}^*)\chi = \mathrm{d}^*\chi$, 辅以来自于 $\tilde{g}$ 是 $C^{1,1/2}$ 所得的算子 d^* 至少 $C^{0,1/2}$ 的性质, 利用椭圆方程内估计直接得到第二条不等式. 对相关的理论, 著作[15]仍可被力荐. ∎

上述引理中的 $\tilde{g}$ 的以何种形式体现在流形的工作上? 该问题由紧随而来的引理回答. 大致来说, 是局部上把流形上的度量拉回到欧氏空间单位球上, 而对流形的几何信息一定程度上的限制便保证了 $C^{1,1/2}$-范数的差距不致过大.

引理 4.10　设 (M, g) 是七维完备 Riemann 流形, 存在三个正常数 D_2, D_3 和 t 使内射半径 $\delta(g) \geqslant D_2 t$ 且 Riemann 曲率 $\|R(g)\|_{C^0} \leqslant D_3 t^{-2}$. 则存在只取决于 D_2 和 D_3 的正常数 F_4 使任意的 $r \in (0, F_4 t]$ 和任取的 $m \in M$, 存在 M 中的开球 $B_r(m)$ 和微分同胚 $\Psi_{r,m} : B_1^7 \to B_r(m)$ 使 $\Psi_{r,m}(0) = m$ 且 $\|r^{-2}\Psi_{r,m}^*(g) - \langle\cdot,\cdot\rangle\|_{C^{1,1/2}} \leqslant F_1$, 其中 F_1 正是引理4.9中的所得.

证明　首先用共形变换 $g \mapsto t^{-2}g$ 算得 $\delta(t^{-2}g) = t^{-1}\delta(g)$ 与 $R(t^{-2}g) = t^2 R(g)$, 故 $\delta(t^{-2}g) \geqslant D_2$ 和 $R(t^{-2}g) \leqslant D_3$. 因而只需对 $t = 1$ 证明. 今待证实为为 M 选一个良好的坐标卡使度量 g 在 $C^{1,1/2}$-范数意义下与典范度量接近. 利用论文[18]的主结果: 若内射半径下有界而截面曲率上有界, 则将存在坐标系统使得对所有给定半径的球上的度量均是 $C^{1,\alpha}$-有界的——辅以对坐标卡的伸缩变换, 明所欲证. ∎

上述引理已经展示一二共形带来的作用, 下一条引理将结合这两条引理, 把共形变换应用到引理4.9的不等式上, 并由此从局部走向整体.

引理 4.11　令 (M, g), D_2, D_3 和 t 为引理4.10中所述, 令 $F_1, \cdots, F_4$ 为引理4.9和引理4.10中所得的常数. 则存在与 t 无关的正常数 F_5 使得对于任意的 $r \in (0, F_4 t]$

及任取的闭形式 $\chi \in C^{1,1/2}(\Lambda^3 \mathrm{T}^* M)$ 有如下两不等式:

$$\begin{aligned} \|\chi\|_{C^0} &\leqslant F_2(r\|\nabla\chi\|_{C^0} + r^{-7/2}\|\chi\|_{L^2}), \\ \|\nabla\chi\|_{C^0} + r^{1/2}[\nabla\chi]_{1/2} &\leqslant F_5(\|\mathrm{d}^*\chi\|_{C^0} + r^{1/2}[\mathrm{d}^*\chi]_{1/2} + r^{-1}\|\chi\|_{C^0}). \end{aligned}$$

证明 在引理4.9和引理4.10的基础上, 加上共形性知对于任意的 $m \in M$ 有

$$\begin{aligned} &\|\chi|_{B_r(m)}\|_{C^0} \leqslant F_2(r\|\nabla\chi|_{B_r(m)}\|_{C^0} + r^{-7/2}\|\chi|_{B_r(m)}\|_{L^2}), \\ &\qquad \|\nabla\chi|_{B_{r/2}(m)}\|_{C^0} + r^{1/2}[\nabla\chi|_{B_{r/2}(m)}]_{1/2} \\ &\qquad\qquad \leqslant F_3(\|\mathrm{d}^*\chi|_{B_r(m)}\|_{C^0} + r^{1/2}[\mathrm{d}^*\chi|_{B_r(m)}]_{1/2} + r^{-1}\|\chi|_{B_r(m)}\|_{C^0}). \end{aligned}$$

稍加细谈何处产生的诸系数. 对于 ∇ 和 d^* 这类涉及导数的内容中, 由于分母出现了一次的距离, 故需补充一个 r 以保持之; 凭依此理, 考察 1/2-Hölder 信息时也产生了 $r^{1/2}$ 的系数; 至于 L^2-范数则主要来自于体元有 r^{-7} 的变化, 再开根号得 $r^{-7/2}$ 的结果.

对不等式左侧的 C^0-范数, 无非对 $m \in M$ 取极大值即明之. 因而欠考察如是

$$\sup_{m\in M} r^{1/2}[\nabla\chi|_{B_{r/2}(m)}]_{1/2} \leqslant F_3(\|\mathrm{d}^*\chi\|_{C^0} + r^{1/2}[\mathrm{d}^*\chi]_{1/2} + r^{-1}\|\chi\|_{C^0}).$$

此时微调 F_1 以保证半径为 $r/4$ 的测地球总是落入某个 $B_{r/2}(m)$; 由是对于 γ 为长度大于 $r/4$ 的测地线, 进行简单的估计见

$$\frac{|\nabla\chi(\gamma(0)) - \nabla\chi(\gamma(1))|}{\sqrt{l(\gamma)}} \leqslant 4r^{-1/2}\|\nabla\chi\|_{C^0}.$$

总而言之, 可有

$$[\nabla\chi]_{1/2} \leqslant \max(\sup_{m\in M} r^{1/2}[\nabla\chi|_{B_{r/2}(m)}]_{1/2}, 4r^{-1/2}\|\nabla\chi\|_{C^0}),$$

故可例取 $F_5 = 5F_3$ 得所欲证. ∎

至此, 这些准备足以迈入对定理4.2的证明.

证明 行至尾声, 逐条见来.

对 (i) 只需注意到借插值不等式

$$[\nabla\psi]_{1/2}^2 \leqslant 2\|\nabla\psi\|_{C^0}\|\nabla^2\psi\|_{C^0}$$

以推出 $\|\psi\|_{C^{1,1/2}} \leqslant 3D_1 t^4$, 辅以定义 $E_1 = 3D_1$ 便明了.

在引理4.11中令 $r = F_4 t$ 即见 (ii) 中第一条不等式的成立不成问题, 然第二条化为

$$\|\nabla\chi\|_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\chi]_{1/2} \leqslant F_6(\|\mathrm{d}^*\chi\|_{C^0} + t^{1/2}[\mathrm{d}^*\chi]_{1/2} + t^{-1}\|\chi\|_{C^0}),$$

其中 F_6 只取决于诸 F_i. 对比 (ii) 中第二条不等式, 不难察觉首务在使右方的 C^0-范数变为 L^2-范数. 为此目的, 代入引理4.11的第一式有

$$\begin{aligned}(1 - F_2F_6rt^{-1})\|\nabla\chi\|_{C^0} &+ t^{1/2}[\nabla\chi]_{1/2}\\ &\leqslant F_6(\|\mathrm{d}^*\chi\|_{C^0} + t^{1/2}[\mathrm{d}^*\chi]_{1/2} + F_2t^{-1}r^{-7/2}\|\chi\|_{L^2}).\end{aligned}$$

不妨取 $r = \min(F_4, 1/(2F_2F_6))t$ 令 (ii) 可被信服. 注意凭依此法所得的 E_3 取决于诸 F_i 进而仍只取决于诸 D_i.

定理4.1(iii) 无非是定理4.2(iv) 的直接平凡推论.

今只余说明 (iv). 丘的论文[19]给出了无边 n 维 Riemann 流形上作用于函数的 Laplace 算子 $\Delta = \mathrm{d}^*\mathrm{d}$ 的最小正特征值的具体正下界, 其只取决于 n, 直径的上界 $\mathrm{diam}(M)$, 体积的下界 $\mathrm{vol}(M)$ 和 Ricci 曲率的界. 前三者均不构成困难, 对 Ricci 曲率则只需注意因对 ψ 的 C^2-范数的控制导致 g 与平坦度量的差距不过是 $O(t^4)$, 故 t 较小时 g 的 Ricci 曲率必然是有界的. 记该正下界为 E_5^{-2}, 亦仅取决于诸 D_i. 则若 f 为 M 上光滑实函数且 $\int_M f\,\mathrm{d}\mu = 0$, 可有 $\langle f, \Delta f\rangle \geqslant E_5^{-2}\|f\|_{L^2}^2$; 另一方面 Stokes 定理指出 $\langle f, \Delta f\rangle = \|\mathrm{d}f\|_{L^2}^2$. 故 $\|f\|_{L^2} \leqslant E_5\|\mathrm{d}f\|_{L^2}$, 明所欲证. ∎

参 考 文 献

[1] PASQUOTTO F. Linear g-structures by examples[EB/OL]. http://www.few.vu.nl/~pasquott/course16.pdf.

[2] 包恺成, 陈子安. 主丛介绍[J/OL]. 蛙鸣, 2022. http://staff.ustc.edu.cn/~mathsu01/pu/pdf/Warming_65(2022.06).pdf.

[3] JOYCE D D. Oxford mathematical monographs: Compact manifolds with special holonomy[M]. Oxford University Press, Oxford, 2000: xii+436.

[4] SALAMON S. Pitman research notes in mathematics series: Riemannian geometry and holonomy groups[M/OL]. Longman Scientific & Technical, 1989. https://books.google.fr/books?id=rlXvAAAAMAAJ.

[5] BOREL A, LICHNEROWICZ A. Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes[J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1952, 234: 1835-1837.

[6] AMBROSE W, SINGER I M. A theorem on holonomy[J/OL]. Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75: 428-443. https://doi.org/10.2307/1990721.

[7] DE RHAM G. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann[J/OL]. Comment. Math. Helv., 1952, 26: 328-344. https://doi.org/10.1007/BF02564308.

[8] BERGER M. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes[J/OL]. Bull. Soc. Math. France, 1955, 83: 279-330. http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__279_0.

[9] BRYANT R L. Metrics with exceptional holonomy[J/OL]. Ann. of Math. (2), 1987, 126(3): 525-576. https://doi.org/10.2307/1971360.

[10] BRYANT R L, SALAMON S M. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy[J/OL]. Duke Math. J., 1989, 58(3): 829-850. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-89-05839-0.

[11] ATIYAH M F, HITCHIN N J, SINGER I M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry[J/OL]. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 1978, 362(1711): 425-461. https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0143.

[12] JOYCE D D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I, II[J/OL]. J. Differential Geom., 1996, 43(2): 291-328, 329-375. http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214458109.

[13] KARIGIANNIS S. Flows of G_2-structures. I[J/OL]. Q. J. Math., 2009, 60(4): 487-522. https://doi.org/10.1093/qmath/han020.

[14] BONAN E. Sur des variétés riemanniennes à groupe d'holonomie G_2 ou spin (7) [J]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 1966, 262: A127-A129.

[15] TAYLOR M E. Applied mathematical sciences: Vol. 115 partial differential equations. I[M/OL]. Springer-Verlag, New York, 1996: xxiv+563. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9320-7.

[16] EGUCHI T, HANSON A J. Self-dual solutions to Euclidean gravity[J/OL]. Ann. Physics, 1979, 120(1): 82-106. https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90282-3.

[17] BRYANT R L. Some remarks on G_2-structures[C]//Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2005. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2006: 75-109.

[18] GREENE R E, WU H. Lipschitz convergence of Riemannian manifolds[J/OL]. Pacific J. Math., 1988, 131(1): 119-141. http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102690072.

[19] YAU S T. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold[J/OL]. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 1975, 8(4): 487-507. http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_4_487_0.