四维黎曼几何中的自对偶

陈子安, 张乐, AND 朱海鑫

摘要. 我们通过学习 Atiyah, Hitchin 与 Singer 合作发表的著名论文《四维黎曼几何中自对偶》掌握了一些几何学与微分方程的基本知识。我们在这个报告中列举了其中的一部分重要内容。同时，我们理解了这篇论文中的部分重要结果，并将学习笔记摘录下来。其中包括：1. 可积性定理在向量丛几何中的应用；2. 黎曼曲率的分解与自对偶条件的几何性质；3. 四维自对偶联络的模空间局部结构。

摘要. We have known some basic knowledges of geometry and differential equations by studying the famous paper "Self-Dual in 4D Riemannian Geometry" published by Atiyah, Hitchin and Singer. We have listed some of the important ones in this report. At the same time, we understand some of the important results in this paper and extract some study notes. These include: 1. The application of the integrability theorem in vector bundle geometry; 2. The decomposition of Riemann curvature and the geometric properties of the self-dual condition; 3. The local structure of the moduli space of the four-dimensional self-dual connection.

目录

1. 论文简介 2
2. 预备知识 2
2.1. 自对偶的黎曼几何 2
2.2. 主丛的几何与示性类理论 8
2.3. 主丛上规范变换与自对偶联络 15
2.4. 反函数定理 17
3. 可积性定理的应用 18
3.1. 基本的可积性命题 18
3.2. 可积性命题的应用 21
4. 自对偶模空间的局部结构 25
4.1. 无穷小形变 26
4.2. 局部流形结构 28
References 29

1. 论文简介

参考文献 [2] 是一篇微分几何领域的经典论文。这篇文章在美国数学会的 MathSciNet 数据库中报告有 369 次应用和 62 次的评论中引用。虽然年代久远，但是其中涉及的知识包含有微分集合、偏微分方程、拓扑学等众多领域。我们通过一年的学习，掌握了一些背景知识，理解了作者的主要结果。现将我们学习的部分成果整理如下。

这篇文章主要包含了两个方面的内容。首先是可积性定理，通过研究可积性定理在具体的自对偶四维流形中的应用，作者将四维流形的共形结构和某向量丛上的近复结构联系起来，指出这个共形结构是自对偶的当切仅当这个近复结构是可积的（见定理3.4）。这个对应随后被应用来构造 S^4 上的所有自对偶联络。这个联络对于几何学和物理学都有非常重要的作用。

这篇文章的第二部分就研究了这种联络的模空间理论。它证明了，如果底流形是自对偶的四维黎曼流形，并且标量曲率是正的，那么一个不可约的自对偶联络附近的模空间是一个有限维的流形（见第4节）。

2. 预备知识

本节介绍一些理解主要结论必须的预备知识。

2.1. **自对偶的黎曼几何.**

2.1.1. 黎曼几何中的曲率分解. 在黎曼几何中，切丛有自然的 Levi-Civita 联络，定义了曲率如下。

Definition 2.1. *设 M 为黎曼流形，∇ 为 M 上 Levi-Civita 联络，定义黎曼曲率张量为如下的（0,4）张量 R*

$$R(X,Y,Z,W) = < -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z, W > \tag{2.1}$$

Remark 2.2. *可以验证黎曼曲率张量的定义对于向量场都是 C^∞ 线性的，所以定义了一个整个流形上的光滑张量场。*

黎曼曲率张量有如下对称性。

Proposition 2.3. *黎曼曲率张量对于前两个，后两个变量分别是反对称的，将前两个变量，后两个变量视为整体，对这两个整体变量是对称的。*

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) \tag{2.2}$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) \tag{2.3}$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y) \tag{2.4}$$

设 V 为线性空间，用 S^2V 表示对称 2 张量，Λ^2V 表示反对称 2 张量，有 $S^2V\oplus\Lambda^2V=\otimes^2V$，于是黎曼张量的对称性可以写为

Proposition 2.4.

$$R\in\Gamma(S^2(\Lambda^2T^*M)) \tag{2.5}$$

下面找黎曼曲率张量的更多对称性以方便分解它。

Theorem 2.5 (Bianchi identities)**.**

$$R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0 \tag{2.6}$$

$$\nabla_XR(U,V,Y,Z)+\nabla_YR(U,V,Z,X)+\nabla_ZR(U,V,X,Y)=0 \tag{2.7}$$

对于一般的 $\Gamma(S^2(\Lambda^2T^*M))$ 中元素，不像曲率张量一样有 Bianchi 恒等式，于是我们可以利用 Bianchi 算子的核刻画满足第一个 Bianchi 恒等式的张量。

Definition 2.6. *设 $T\in\Gamma(S^2(\Lambda^2T^*M))$，定义 Bianchi 算子为 $b:S^2(\Lambda^2T^*M)\to S^2(\Lambda^2T^*M)$ 为*

$$bT(X,Y,Z,W)=\frac{1}{3}(T(X,Y,Z,W)+T(Y,Z,X,W)+T(Z,X,Y,W)) \tag{2.8}$$

Proposition 2.7. *$b^2=b$，即 b 为投影算子，像为 Λ^4T^*M，核记为 $\mathcal{C}$，其中元素满足第一个 Bianchi 恒等式，称为曲率型张量。*

下面我们用一般的对称 2-张量生成曲率型张量和 $S^2(\Lambda^2T^*M)$ 型张量，下记 $V=T_pM$。

Definition 2.8. *设 $\alpha,\beta\in\Lambda^2V^*T_1,T_2\in S^2V^*$，定义 $\alpha\odot\beta,T_1 \owedge T_2$ 如下*

$$\alpha\odot\beta(X,Y,Z,W)=\alpha(X,Y)\beta(Z,W)+\beta(X,Y)\alpha(Z,W) \tag{2.9}$$

$$T_1 \owedge T_2(X,Y,Z,W)=T_1(X,Z)T_2(Y,W)+T_1(Y,W)T_2(X,Z)-T_1(Y,Z)T_2(X,W)-T_1(X,W)T_2(Y,Z) \tag{2.10}$$

其中 $\alpha\odot\beta$ 称为对称积，$T_1 \owedge T_2$ 称为 Kulkarni-Nomizu 积。

Proposition 2.9. *$\alpha\odot\beta\in S^2(\Lambda^2V^*),T_1 \owedge T_2\in\mathcal{C}$，且有 $b\alpha\odot\beta=\frac{1}{3}\alpha\wedge\beta$*

下面对于曲率型张量定义迹映射。

Definition 2.10. *设 T 为曲率型张量，$T(Z,X,\bullet,Y):V\to\mathbb{R}$ 为线性映射，设 $\#:V^*\to V$ 是由度量诱导的同构，定义 Ricci 收缩为对称 2 张量 $c(T)$*

$$c(T)(X,Y)=Tr(Z\mapsto\#T(Z,X,\bullet,Y)) \tag{2.11}$$

利用 Kulkarni-Nomizu 积定义对称 2 张量到曲率性张量的映射

Definition 2.11.

$$\Psi : S^2V^* \to \mathcal{C}, \Psi(T) = T \owedge g \tag{2.12}$$

Proposition 2.12. Ψ 是 *Ricci* 收缩的对偶

$$< S, \Psi(T) >= 4 < c(S), T > \tag{2.13}$$

证明. 选取基计算即可。 □

和 Ricci 收缩类似，定义对称 2 张量的迹

Definition 2.13. 设 $T \in S^2V$，定义迹为

$$Tr(T) = Tr(X \mapsto \#T(X, \bullet)) \tag{2.14}$$

也可写为 $Tr(T) =< T, g >$

Proposition 2.14.

$$c(\Psi(T)) = (m-2)T + Tr(T)g \tag{2.15}$$

证明. 选基计算即可。 □

下面我们对曲率张量应用这些映射。

Definition 2.15. 令 $Ric = c(R)$ ，称为 *Ricci* 曲率张量。
$S = Tr(Ric)$，称为数量曲率。

我们希望把 Riemannian 曲率张量分解为数量曲率部分，Ricci 张量消掉数量曲率部分和剩余部分，我们先把 Ricci 张量的迹消掉。

Definition 2.16.

$$E = Ric - \frac{S}{m}g \tag{2.16}$$

称为无迹 *Ricci* 张量。

在 3 维以上的情况，我们再把 Riemannian 张量的 Ricci 收缩项消掉，考虑 $W = R - A \owedge g$，则有

Proposition 2.17.

$$c(W) = Ric - (m-2)A - Tr(A)g \tag{2.17}$$

取

$$A = \frac{1}{m-2}(Ric - \frac{S}{2(m-1)}g) \tag{2.18}$$

此时 $c(W) = 0$，称这种情况的 A 为 *Schouten* 张量，W 为 *Weyl* 张量。

综合上面的定义和命题，有如下定理。

Theorem 2.18 (曲率张量的分解)**.**

$$R = W + \frac{1}{m-2}E \owedge g + \frac{S}{2m(m-1)}g \owedge g \tag{2.19}$$

三个部分互相正交，分别称为 *Weyl* 张量部分，无迹 *Ricci* 张量部分，数量曲率部分。

Remark 2.19. *1.*$m = 2$ 时，无迹 *Ricci* 和 *Weyl* 张量均为 *0*，只有数量曲率项，即 *Gauss* 曲率。
2.$m = 3$ 时，*Ricci* 曲率决定所由截面曲率，所以 *Weyl* 张量仍为 *0.*
3.$m = 4$ 时，此时 *3* 个分量均可能非平凡，下面研究 *Weyl* 张量的进一步分解。

固定维数为 4，M 上有自然的 Hodge-Star 算子 $* : \Lambda^2T^*M \to \Lambda^2T^*M$ 平方为 1，所以可以直和分解为 $\Lambda^2T^*M = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$，由于 $R \in \Gamma(S^2(\Lambda^2T^*M))$，利用外代数丛上自然的度量可以视为 $\mathcal{R} : \Lambda^2T^*M \to \Lambda^2T^*M$ 的丛同态。而 2 阶微分形式丛上由 Hodge-Star 得出的直和分解把该映射分解为 4 个分量，由于曲率张量分解的每个分量都是曲率型张量，于是也可化为这样的映射。其中交换分量的映射是无迹 Ricci 项，映射的迹是由数量曲率项提供的，剩下的是 Weyl 张量写为如下形式的分解。

$$W = W_+ + W_- \in \Gamma(End(\Lambda^2_+)) \oplus \Gamma(End(\Lambda^2_-)) \tag{2.20}$$

分别称为 Weyl 张量的自对偶部分和反自对偶部分。

Definition 2.20. *4* 维黎曼流形 M 称为自对偶的，如果 $W_- = 0$，即 *Weyl* 张量是自对偶的。

Weyl 张量有很好的几何性质。

Proposition 2.21. *Weyl* 张量是共形不变的。

由此，给定一个流形上的共形结构便可良好定义 Weyl 张量。

2.1.2. *Hodge* 理论. 本节所述定理的证明可以在 [8] 第 3 章中找到。设 M 是紧定向黎曼流形，在微分形式丛上定义 L2 内积为逐点内积再对体积形式积分，有如下定义。

Definition 2.22. 设 $d:\mathcal{A}^*(M)\to\mathcal{A}^{*+1}(M)$ 为外微分，定义外微分的对偶算子 $d^*:\mathcal{A}^*(M)\to\mathcal{A}^{*-1}(M)$ 为满足

$$(\alpha, d\beta)=(d^*\alpha,\beta), \alpha,\beta\in\mathcal{A}^*(M) \tag{2.21}$$

定义 *Hodge* 拉普拉斯为二阶微分算子 $\triangle=dd^*+d^*d:\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^k(M)$.

设 $\omega\in\mathcal{A}^k(M)$，若 $\triangle\omega=0$，则称 ω 为调和 k 形式，所有调和 k 形式构成的线性空间记为 $\mathcal{H}^k(M)$.

Hodge 理论的核心在于 Hodge 分解定理，它给出了所有微分形式这个线性空间的直和分解，特别的，可以用来计算 de Rham 上同调群。

Theorem 2.23 (Hodge 分解定理)**.** 设 M 为紧定向黎曼流形，则 M 的微分 k 形式全体空间可写为如下的直和分解：

$$\mathcal{A}^k(M)=\mathcal{H}^k(M)\oplus Im(d)\oplus Im(d^*) \tag{2.22}$$

对于紧 Kähler 流形上的 (p,q) 形式也可类似定义 Hodge 拉普拉斯算子，对应的空间也有类似的分解。

Theorem 2.24 (Hodge 分解定理)**.** 设 M 为紧 *Kähler*，则 M 的微分 (p,q) 形式全体空间可写为如下的直和分解：

$$\mathcal{A}^{p,q}(M)=\mathcal{H}^{p,q}(M)\oplus Im(\bar\partial)\oplus Im(\bar\partial^*) \tag{2.23}$$

下面是该定理的简单推论。

Theorem 2.25 (Hodge)**.** 在 *Hodge* 分解定理的条件下有调和形式和 *de Rham/Dolbeault* 上同调群的同构如下

$$H^k(M,\mathbb{R})\cong\mathcal{H}^k(M) \tag{2.24}$$

$$H^{p,q}(M)\cong\mathcal{H}^{p,q}(M) \tag{2.25}$$

Hodge 理论的强大之处在于把拓扑上的问题划归到一个椭圆方程的问题，这样我们就有更多的手段去计算流形的拓扑。下面给出基于流形上的椭圆算子和拟微分算子的 Hodge 分解定理的证明。

由于 Hodge 拉普拉斯算子是外代数丛上 Dirac 算子 de Rham 算子的平方，所以有如下性质。

Proposition 2.26. *Hodge* 拉普拉斯是二阶椭圆自伴微分算子。

利用椭圆算子的理论可知

Theorem 2.27. 设 $P:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 为紧黎曼流形上的自伴椭圆微分算子，则有直和分解

$$\Gamma(E)=ker(P)\oplus Im(P) \tag{2.26}$$

Remark 2.28. *Hodge* 分解定理只需对 P 为 *Hodge* 拉普拉斯直接应用定理即可。

证明. 设 P 为 m 阶微分算子，利用拟微分算子的结论，将 P 设为 Sobolev 空间之间的有界线性算子，则存在 $Q\in\Psi DO_{-m}(E)$ 使得 $PQ=Id-S',QP=Id-S$，S,S' 为向光滑截面的子空间 $kerP,kerQ$ 的正交投影。
先证 $\forall,s\in\mathbb{R}$ 存在常数 C_s，使得对任意 $u\in L_s^2(E)$ 有估计

$$\| u \|_s\leq C_s(\| u \|_{s-m}+\| Pu \|_{s-m}) \tag{2.27}$$

其中范数为 Sobolev 范数,$L_s^2(E)$ 为 Sobolev 空间。
利用 $u=QPu+Su$ 和三角不等式还有拟微分算子的范数控制易得。

利用 $u=QPu+Su$ 还可证明 u 光滑当且仅当 Pu 光滑。

而 P 有逆 Q, 所以 $P:L_s^2(E)\to L_{s-m}^2(E)$ 为 Fredholm 算子。将 $L^2(E)=ker(P)\oplus ker(P)^{\perp}$, 考虑 $u\in\Gamma(E)$, 在直和分解下可以写为 $u=u_0+u_1$,$u_0=Su$ 也光滑, 所以 u_1 也光滑。而 $ker(P)^{\perp}=Im(P^*)=P(L_m^2(E))$, 所以 $u_1=Pu_2$, 而 u_1 光滑，所以 u_2 光滑，于是有 $P(\Gamma(E))=ker(P)^{\perp}\cap\Gamma(E)$，证毕。 □

2.1.3. 相交形式.

Definition 2.29. 设 M 为 $4n$ 维紧定向流形，基本类为 $[M]\in H_{4n}(M;\mathbb{Z})$。$\mathbb{Z}$ 对称双线性形式

$$Q:H^{2n}(M;\mathbb{Z})\otimes H^{2n}(M;\mathbb{Z})\to\mathbb{Z},\alpha\otimes\beta\mapsto(\alpha\cup\beta)[M] \tag{2.28}$$

称为流形 M 的相交形式。

Poincare 对偶给出了流形的相交形式是一个非退化的双线性型。

对于 4 维 (拓扑) 流形，一个自然的问题是相交形式多大程度的决定流形的拓扑，有如下定理。

Theorem 2.30 (Freedman)**.** 给定一个对称 $\mathbb{Z}$ 双线性型 Q，存在以 Q 为相交形式的单连通 *4* 维紧流形，更进一步的有

1. 若 Q 是偶的，即 $Q(x,x)$ 均为偶数，则满足该条件的流形唯一。
2. 若 Q 是奇的，即 Q 不是偶的，则满足该条件的流形恰有两个，至少其中之一没有任何光滑结构。

2.2. 主丛的几何与示性类理论.

2.2.1. 主丛的相关构造. 这一方面的主要内容可以参考 [4].

Definition 2.31. *设 G 之为一个 Lie 群, 称 (E,π,M) 为一个主丛, 若 E,M 二者皆为光滑流形, 映射 $\pi : E \to M$ 是为光滑投影, 且 G 在 E 上有右作用, 且满足如下之条件:*

- *任取 $p \in M$, 纤维 $\pi^{-1}(\{p\})$ 是 G-轨道;*
- *存在 M 的开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$, 且存在光滑映照 $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$, 还同时满足 G-等变.*

主丛的特别之处在于其纤维是 Lie 群, 而群可以具有表示, 从而有机会将主丛变为向量丛: 这便是配丛. 现在一个主丛已经天然有了右作用了, 如果还能左作用到另一个流形, 我们可以相信, 这必然可以得到一个新的纤维丛.

考虑一个流形 N 有 G-左作用,(注意到当 N 恰是欧氏空间时, 我们把这样的作用称为表示,) 我们可以定义 $E_N = (E \times N)/G$, 其中商掉的群作用是 $(x,u)g = (xg, g^{-1}u)$. 最后仍需要定义投影映射, 为此, 我们可以作出如下交换图:

$$\begin{tikzcd} E \times N \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\pi"] & M \\ (E \times N)/G \arrow[urr, dashed, "\pi_N"] & & \end{tikzcd}$$

我们可以简单来感受一下该纤维丛的局部平凡化是如何得到的, 实际上只需要有

$$\pi_N^{-1}(U) \simeq (\pi^{-1}(U) \times N)/G \simeq ((U \times G) \times N)/G \simeq U \times N.$$

至此, 我们得到了 (E_N, π_N, M), 被称为相伴于主丛 (E,π,M) 的以 N 为纤维的纤维丛. 当 N 正是线性空间时, 作用即为表示, 这恰好就是向量丛, 这也是主丛一种常见的用法: 即通过主丛制造向量丛.

有了一个结构, 结构之间的同态是必然要构造与定义的. 对于主丛, 最关键的便在于 Lie 群 G 给出的右作用, 在定义同态的时候也需要明显展出, 是为:

Definition 2.32. *(E,π,M) 和 (E',π',M) 为两个 G-主丛, 则主丛间的同态 $\varphi : E \to E'$ 首先是纤维丛之间的同态, 并且满足 G-等变.*

有了同态, 同构的定义是自然的, 此处不再赘述. 实际上我们同样可以定义底流形变动的状况下的同态, 此时应该对映射对去定义, 如下:

Definition 2.33. 映射对 $(f,\bar f)$ 为两个 G-主丛 (E,π,M) 和 (E',π',M') 之间的同态, 若 $f:M\to M'$ 和 $\bar f:E\to E'$ 是流形间的光滑映照, 且满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

辅以要求 $\bar f$ 是 G-等变的.

一个最简单的例子是所谓的平凡主丛, 即 $M'=\{\mathrm{pt}\}$, 而 $E'=G$, 此时 $E=M\times G$. 我们称一个主丛是平凡的, 若其同构于平凡主丛. 一个关键性的结论是: 主丛若有整体截面则必平凡. 这是其与向量丛十分不同之处, 主要是因为其纤维为 Lie 群而非向量空间.(类似的结论应当是若秩为 k 的向量丛有 k 个处处线性无关的整体截面, 则向量丛为平凡丛.)

这样的交换图使人自然想到拉回的构造, 当然, 主丛上同样可以构造拉回, 并且有所有拉回都有的泛性质.

Definition 2.34. 给定主丛 (E,π,M), 光滑流形 M' 和光滑映照 $f:M'\to M$, 我们定义拉回 $f^*(E)=\{(p,x)\in M'\times E|f(p)=\pi(x)\}$, 从而 $\bar f$ 和 π' 都为自然的投影.

泛性质则以如下交换图表示:

$$\begin{tikzcd} \tilde E \arrow[drr, bend left, "\tilde f"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde\pi"'] & & \\ & f^*(E) \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

下面我们给出两个经典而有意义的例子.

- 考虑 G 在自身上的共轭作用, 即任意 $g,h\in G$, $Ad_g(h):=g\cdot h=ghg^{-1}$. 这是一个左作用, 由此我们得到:

$$\begin{tikzcd} E\times G \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\rho"] & E \arrow[r, "\pi"] & M \\ E_{iG} \arrow[urr, dashed, "\pi_{iG}"] & & \end{tikzcd}$$

  其中 $E_{iG}=E\times G/\sim$, $(x,g)\sim(x',g')$ 当且仅当存在 $h\in G$, $(x',g')=h\cdot(x,g)=(xh,h^{-1}gh)$. 不难看出 E_{iG} 是 M 上的一个群丛.

- 考虑 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，仍通过共轭作用，我们得到 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的左作用：任意 $g \in G$，$\xi \in \mathfrak{g}$，$g \cdot \xi = (Ad_g)_*(\xi)$. 进而有

$$\begin{tikzcd} E \times \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\rho"] & E \arrow[r, "\pi"] & M \\ Ad_E \arrow[urr, dashed, "\pi_{Ad}"] & & \end{tikzcd}$$

  我们称其为 $G-$ 主丛 E 的伴随丛.

对于主丛这样的结构, 同样可以和其他我们在几何中熟悉的构造相结合, 实际上, 这便是有着极为简单的对应, 马上我们来给出其上同调描述, 主要的结果将被写为如下定理:

Theorem 2.35. *M 上的 G-主丛一一对应于 $\check{H}^1(M, G)$ 中的元素.*

取开覆盖 $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ 平凡化 E, 也即是存在 G-等变微分同胚 $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$. 这样在两个开集相交的地方 $U_i \cap U_j$ 上就有

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \to (U_i \cap U_j) \times G,$$

在元素上可以具体记为 $(x, g) \mapsto (x, c_{ij}(x)g)$. 我们作出如下之交换图, 以便宜理解此构造:

$$\begin{tikzcd} (U_i \cap U_j) \times G \arrow[rr, "(\mathrm{id}, c_{ij}) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"] & & (U_i \cap U_j) \times G \\ & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

我们的精神是: 这组资料 (U_i, c_{ij}) 在一定条件下就能够决定主丛的结构, 因为本质上它蕴含了如何将平凡的局部粘合成整体的信息. 易于验证上面定义的 (U_i, c_{ij}) 就给出了一个 $\check{H}^1(M, G; \mathcal{U})$ 中的上同调类. 而更细的覆盖 $\mathcal{U}'$ 当然也平凡化此主丛, 因此也对应的 $\check{H}^1(M, G; \mathcal{U}')$ 中元素, 这样便给出 $\check{H}^1(M, G)$ 中的一个上同调类.

反过来, 一个 $\check{H}^1(M, G)$ 中的元素也给出一个 M 上的 G-主丛. 构造的想法是先取出每一片覆盖 U_i 上对应的 $U_i \times G$, 再用上同调中的元素 c_{ij} 将其粘合成所要的 E. 具体地说, 先直接构造无交并 $E' = \coprod_i (U_i \times G)$, 然后我们的工作便是商掉不同开集之间的转换关系. 今在其上定义等价关系: 设 $(x, g_i) \in U_i \times G$, 且设 $(x, g_j) \in U_j \times G$, 即是 M 上同一个点但是分属于不同的开集上, 那么二者等价 $(x, g_i) \sim (x, g_j)$, 若存在 c_{ij}, 使得 $g_j = g_i c_{ij}(x)$. 由此可见余链条件 $c_{ij} \circ c_{ki} = c_{kj}$ 的意义便在于此关系确为等价关系, 即该关系具有传递性. 从而商空间 $E = E'/\sim$ 辅以其到第一个分量的投影便是一个 M 上的 G-主丛.

2.2.2. 联络与曲率. 后面要用到向量值的微分形式, 下面快速地列出一些必要的定义, 大部分东西与平时的微分形式一样, 只需注意的状况会被详细解释.

Definition 2.36. 设 V 是向量空间,M 是光滑流形, 其上的 V-值 k 次微分形式 ω 为 $\bigoplus_k TM \to V$ 的交错 k-线性的函数, 且在 $C^\infty(M)$ 意义下, 我们记这样的 ω 的集合是 $\Omega^k(M,V)$.

这样的定义不过是为了与取基那样人为性的操作划清界限罢了, 实际上心中自知不过 $\omega = \omega_1 e_1 + ... + \omega_k e_k$, 其中 $(e_i)_{i=1,...,k}$ 是为 V 的一组基, 而诸 $(\omega_i)_{i=1,...,k}$ 为平常的微分形式. 从此, 算子 d, 各种诱导映照的定义全都是自然的. 我们在此关心一下楔积, 先给出定义

Definition 2.37. 令 $\omega_1 \in \Omega^k(M,V)$, 而 $\omega_2 \in \Omega^l(M,W)$, 则 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{k+l}(M, V\otimes W)$, 具体写为

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(X_1,...,X_{k+l}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(k)})\otimes\omega_2(X_{\sigma(k+1)},...,X_{\sigma(k+l)}),$$

其中 $\mathfrak{S}_p$ 表示 p 阶置换群, 群同态 $\operatorname{sgn}: \mathfrak{S}_p \to \{\pm 1\}$ 是自然的符号映射.

注意到这和我们平时使用的楔积也是一致的. 在平时 $V = W = \mathbb{R}$, 则有自然的乘法 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 这将诱导 $\Omega^k(M,\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}) \to \Omega^k(M,\mathbb{R})$, 从而与寻常的状况符合. 以上定义出来的诸多概念的性质也与平时所用一样, 比如 $\mathrm{d}^2 = 0$, 不需要担心.

对于 Lie 群, 我们需要回念到, 有个概念称为伴随表示, 实际上根本就是

$$\mathrm{Ad}: G \to GL(\mathfrak{g}), g \mapsto \mathrm{d}(x \mapsto gxg^{-1}),$$

此处已经典范地将 $\mathfrak{g}$ 视为左不变向量场集合和视为单位元处切空间两种观点等同, 并一般都以后者为主.

在微分几何中, 联络的定义方式很多, 观点也很多, 比如为了协变导数, 比如为了平行移动, 此处的观点则也一样类似. 考虑 $x \in E$, 则我们由于局部平凡化的存在, 可以确信 T_xE 应当由 M 的切空间和 G 的切空间组成. 而 G 为 Lie 群, 其不同点处的切空间通过群乘法的切映射来获得同构, 总之, 为 $\mathfrak{g}$. 但是 E 上没有乘法, 取而代之的是右作用, 因而这启发我们考虑 $v_x: \mathfrak{g} \to T_xE$ 为 $g \mapsto xg$ 的切映射, 因而我们可以得到这样的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{v_x} T_xE \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(x)}M \longrightarrow 0$$

作为线性空间的短正合列自然分裂. 但是, 这样的分裂只能逐点, 而几何上总需要光滑性, 因而我们的联络的存在是有必要的, 以说明光滑性. 对上述短正合列我们仍然需要定义一些东西, 称 $v_x(\mathfrak{g})$ 是垂直子空间, 而其一个补子空间 H_x 被

称为水平子空间, 对应于 M 的切空间. 事实上，我们写 $\mathfrak{g}$ 是为了便于直观地理解发生在主丛上的求取切向量的故事，更具体地，我们可以给正合列的左端以更代数的定义. 我们将 TE 上的垂直子空间定义为 π_* 的核，这将有助于我们后来的计算.

- 我们希望这些子空间能随着 x 的变化而光滑移动, 换言之, 我们实际上可以选取一个光滑函数 ω, 逐点上是为线性映射 $\omega(x): T_xE \to \mathfrak{g}$, 使得这成为上述短正合列中的一个截面, 而 H_x 自然变成了核空间, 换言之, 我们选取了一个 $\omega \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$.
- 群作用在主丛的构造中不可忽视, 此处我们注意到我们选取的水平子空间可以被 G 中元素右作用从而移动, 我们应该希望满足某种要求, 具体而言, 定义右乘作用 $R_g: E \to E, x \to xg$, 则要求 $(R_g)_* H_x = H_{xg}$.

我们已然列完了作为一个主丛的联络应当有的条件, 整理如下:

Definition 2.38. *一个 G-主丛 (E, π, M) 上的联络 ω 是 $\Omega^1(E, \mathfrak{g})$ 中的元素, 并满足如下两条要求:*

- *任取 $x \in E$, 应当有 $\omega_x \circ v_x = \mathrm{id}$;*
- *令 $H_x = \mathrm{Ker}\omega_x$, 则 $\forall x \in E$, 要求 $(R_g)_* H_x = H_{xg}$.*

但是第二条要求中的定义并不足够代数, 不方便计算, 许多时候大家会用另一个 (在第一条成立时) 等价的表述:$R_g^* \omega = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$. 下面通过简单的计算证明一下这两条的等价性, 并不困难.

证明. $\Rightarrow$: 注意到第二式对水平向量已然为 0, 故而实际上只需考虑 $v_x(X)$, 其中 $X \in \mathfrak{g}$. 考虑映射 $a \mapsto xag = xg \cdot (g^{-1}ag)$, 此之诱导了 $(R_g)_* \circ v_x = v_{xg} \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})$, 准此即有 $R_g^*(\omega)(v_x(X)) = \omega_{xg}(v_{xg} \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(X)) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(X)$.

$\Leftarrow$: 由于维数一致，只需证 $(R_g)_* H_x \subset H_{xg}$，任取一个 $X \in H_x$，易见 $\omega_{xg}((R_g)_*(X)) = (R_g^* \omega)(X) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega(X)) = 0$, 从而 $(R_g)_*(X) \in \mathrm{Ker}\omega_{xg} = H_{xg}$. □

至于联络的存在性, 也可以和微分几何那样类似操作, 只需要使用单位分解与全体联络之集合凸这样的结论即可完工. 下面再给出几个相关的定义, 然后我们开始考虑定义曲率.

Definition 2.39. *一个 $\omega \in \Omega^k(E, V)$ 称为水平的, 若只要存在 $i = 1, ..., k$, 有 X_i 是垂直的, 则 $\omega(X_1, ..., X_k) = 0$.*

Definition 2.40. *设 ρ 是 Lie 群 G 的一个 V-表示, 称 ω 是 ρ-等变的, 若 $R_g^* \omega = \rho(g^{-1}) \circ \omega$. 特别若有 ρ 平凡, 则 ω 称为不变的. 我们把 ρ-等变的 k-形式集合记为 $\Omega^k(M, E_V)$.*

那么对于定义曲率, 这一问题有一些先验的经验, 那就是必须由联络直接决定, 并且是 2-形式. 在常见的向量丛微分几何中, 曲率直接被定义为 $d\omega + \omega\wedge\omega$. 但在这里碰到了十分微妙的问题, 即 $\mathrm{d}\omega \in \Omega^2(E,\mathfrak{g})$, 而 $\omega\wedge\omega \in \Omega^2(E,\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$, 即两个微分形式取值的线性空间不同. 这便利用 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 代数自带的 Lie 括号 $[\cdot,\cdot]$, 我们把 $\omega\wedge\omega$ 的像记为 $[\omega,\omega]$. 注意到这里有一个两倍的问题, 我们给出定义

Definition 2.41. *曲率形式* $F_\omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$.

对于曲率, 我们可以有如下两个定理表明其性质:

Theorem 2.42. *任何一个曲率形式* F_ω *均为* $\Omega^2(M,E_{\mathfrak{g}})$ *中的元素, 其中* $G\to GL(\mathfrak{g})$ *为自然的伴随表示.*

Theorem 2.43. *Bianchi 恒等式为* $\mathrm{d}F_\omega = [F_\omega,\omega]$.

2.2.3. *平坦丛例子.* 考虑平凡丛 $E = M\times G$, 并且还考虑一个 Lie 群上的 Maurer-Cartan 形式 $\omega_0 \in \Omega^1(G,\mathfrak{g})$, 我们可以取为 $(\omega_0)_g = (L_{g^{-1}})_*$. 这一方面可以直接参考. 实际上, 这已经可以视为 $G\to\{\mathrm{pt}\}$ 上的联络. 我们定义 $\pi_2 : M\times G\to G$, 从而把 ω_0 转移到了 E 上, 是为 Maurer-Cartan 联络 $\omega_{\mathrm{MC}} = \pi_2^*\omega_0$.

我们来验证这实为一个联络, 通过对定义验证即可, 其中定义的第二条可以使用更为方便的等价命题, 如下:

- 任取 $x=(p,g)$, 则此时 $v_x = \mathrm{d}(a\mapsto (p,ga))$ 恰好就是左乘一个 g, 再经过 ω_{MC} 左乘一个 g^{-1}, 则确实复合后为恒同;
- 注意到 π_2^* 和 R_g^* 和 $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ 的交换性, 实际上只需要验证 ω_0 满足定义第二条的等价命题. 此时只需要简单的计算即有

$$\begin{aligned} R_g^*(\omega_0)_a &= (\omega_0)_{ag}\circ (R_g)_* = (L_{(ag)^{-1}})_*\circ (R_g)_* \\ &= (L_{g^{-1}})_*\circ (L_{a^{-1}})_*\circ (R_g)_* = \mathrm{Ad}(g^{-1})\circ (L_{a^{-1}})_* = \mathrm{Ad}(g^{-1})\circ(\omega_0)_a. \end{aligned}$$

接下来计算一下对应的曲率, 只需注意到 $F_{\omega_{\mathrm{MC}}} = \pi_2^* F_{\omega_0}$, 其中已经把 ω_0 视为 $G\to\{\mathrm{pt}\}$ 上的 Maurer-Cartan 联络了. 由前述定理,F_{ω_0} 必然是水平的, 但是 G 上所有切向量都是垂直的, 因为底流形根本就是一个单点, 所以迫使其曲率为 0, 从而平凡丛上 Maurer-Cartan 联络是平坦的.

前面提到了主丛可以通过表示构造伴丛, 同样, 主丛上的联络也可以通过表示推到伴丛上, 成为伴丛上的联络. 下面来简单介绍一下这一流程, 首先我们有一表示 $\rho : G\to GL(V)$, 这将诱导切映射 $d\rho : \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)\simeq M_n(\mathbb{R})$, 此处 $n=\dim V$.

我们先前构造的 E_V 是一个正经的向量丛, 局部上同构于 $U \times V$, 其中 $U \subset M$ 是一个开集. 又回忆到 $E_V = (E \times V)/G$, 因而我们若取一组 V 的基 $(e_1, ..., e_n)$, 且取一个局部截面 (规范选取)$s : U \to E$, 则这就得到了一个局部标架场 $([(s, e_1)], ..., [(s, e_n)])$, 其中 $[\cdot]$ 表等价类.

通过局部规范选取, 我们有 $s^*\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$, 进而 $d\rho \circ s^*\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(V)) \simeq \Omega^1(U, M_n(\mathbb{R}))$, 所得便是局部联络方阵.

2.2.4. *示性类*. 我们从对称多线性泛函说起, 下面 E 均表示复向量丛（除了引入 Pontrjagin 类的时候）。

Definition 2.44. 对称多线性泛函 $P : \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \times .. \times \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 称为不变的, 如果 $P(CB_1C^{-1}, ..., CB_kC^{-1}) = P(B_1, ..., B_k) \forall C \in GL(r, \mathbb{C}), B_i \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ 成立。

不变对称多线性泛函自然诱导丛映射。

Proposition 2.45. P 为 $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ 对称 k 线性泛函,E 为秩为 r 的复向量丛, $m = i_1 + .. + i_k$，自然诱导丛映射
$P : (\Lambda^{i_1} M \otimes End(E)) \times ... \times (\Lambda^{i_k} M \otimes End(E)) \to \Lambda^m_{\mathbb{C}} M$
定义为 $P(\alpha_1 \otimes t_1, ..., \alpha_k \otimes t_k) = \alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_k P(t_1, .., t_k)$

证明. 随便取一个平凡化 $E(x) \cong \mathbb{C}^r$，则定义的可以计算，由不变性，定义合理。 □

Remark 2.46. 该映射可以进一步诱导截面的映射，由于我们只考虑对曲率作用，下面我们只考虑 $P : \mathcal{A}^2(M, End(E)) \times ... \times \mathcal{A}^2(M, End(E)) \to \mathcal{A}^{2k}(M)$

在只考虑定义域是一样的空间相乘时记 $\widetilde{P}(\alpha) = P(\alpha, \alpha, ..., \alpha)$, 称为次数为 k 的不变多项式。

有一个一般的引理，用于说明陈类确实是个同调群中元素。

Lemma 2.47. 对 $\gamma_j \in \mathcal{A}^{i_j}(M, End(E))$ 我们有

$$dP(\gamma_1, ..\gamma_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} i_l} P(\gamma_1, ., \nabla(\gamma_j), ., \gamma_k) \tag{2.29}$$

Corollary 2.48. 对曲率 $\widetilde{P}(F_\nabla) \in \mathcal{A}^{2k}_{\mathbb{C}}(M)$ 为一个 d 闭链。

我们再说明对应的闭类和联络选取无关。

Lemma 2.49. ∇_1, ∇_2 为两联络，则 $[\widetilde{P}(F_{\nabla_1})] = [\widetilde{P}(F_{\nabla_2})] \in H^{2k}(M, \mathbb{C})$

证明. $\nabla_1=\nabla_2+A, A\in\mathcal{A}^1(M,End(E))$
$\widetilde{P}(F_{\nabla_1+tA})=\widetilde{P}(F_{\nabla_1})+ktP(F_{\nabla_1},...,F_{\nabla_1},\nabla(A))+o(t)$
由 Bianchi 恒等式 $P(\mathcal{F}_{\nabla_1},...,\nabla(A))=d(P(F_{\nabla_1},...,A))$ 为恰当类。
恰当类对时间积分也是恰当类，所以证毕。 □

经过这些准备后，我们可以引入陈类。

先考虑 $B\in\mathbb{C}^{r\times r}$,$det(\lambda I_r-B)$ 对 B 的展开, 即是以 λ 为变元 B 的特征多项式正好 r 次, 其系数为一系列特征值的对称多项式, 均可写为 B 的不变多项式。类似的我们考虑

Definition 2.50. *$det(I_r+B)=1+\widetilde{P}_1(B)+...+\widetilde{P}_r(B)$ 得到不变多项式, $deg(\widetilde{P}_i)=i$*
定义 $c_k(E,\nabla)=\widetilde{P}_k(\frac{i}{2\pi}F_\nabla)\in\mathcal{A}^{2k}(M)$
陈类定义为为 $c_k(E)=[c_k(E,\nabla)]\in H^{2k}(M,\mathbb{C})$,$c_0(E)=1\in H^0(M,\mathbb{C})$
实向量丛的 Pontrjagin 类定义为 $p_k(E)=(-1)^kc_{2k}(E\otimes\mathbb{C})\in H^{4k}(M,\mathbb{C})$
全陈类 (Pontrjagin 类) 为 $c(E)=c_0(E)+...+c_r(E)\in H^*(M,\mathbb{C})$

Remark 2.51. *1. 示性类的定义可以是纯拓扑的, 利用两种定义的重叠性甚至可以证明 $c_i\in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$ 这里的同调是奇异上同调, 利用 de Rham 同构即可。*
2. 可以定义流形的陈类和 Pontrjagin 类为其切丛的示性类, 简记为 $c_k(M),p_k(M)$。

类似陈类的定义，我们可以定义陈特征和 Todd 类, 和 $\hat{A}$ 亏格。

Definition 2.52. *$tr(e^B)=\widetilde{P}_0(B)+...$, 陈特征 $ch_k(E)=[\widetilde{P}_k(\frac{i}{2\pi}F_\nabla)]$*
$\frac{det(tB)}{det(I_r-tB)}=\sum\widetilde{P}_k(B)t^k$, Todd 类 $td_k(E)=[\widetilde{P}_k(\frac{i}{2\pi}F_\nabla)]$
设 E 为实向量丛

$$det(\frac{B/2}{sinh(B/2)})=\sum\widetilde{P}_{2k}(B) \tag{2.30}$$

$\hat{A}$ 亏格定义为 $\hat{A}(E)=[\sum\widetilde{P}_{2k}(\frac{i}{2\pi}F_\nabla)]$

2.3. **主丛上规范变换与自对偶联络.** 考虑 $G-$ 主丛范畴上对象 (E,π,M) 的自同构，则其理应保持 G 在 E 上的作用并且稳定 M 上的纤维，由此我们得到以下定义.

Definition 2.53. *称 $f:E\to E$ 为 $G-$ 主丛 E 上的自同构, 若 f 为光滑映射且满足:*

- *$f(xg)=f(x)g$, $\forall g\in G$ 及 $x\in E$;*
- *$\pi\circ f=\pi$.*

习惯性地，我们称此自同构为规范变换。规范变换的全体自然成为一个群，记为 $\mathscr{G}$. 称 E 上两个联络 ω，ω' 是规范等价的，若 $\omega' = f^*\omega$，此等价关系记为 $\sim$.

更一般的，我们还可以考虑 $Aut(E)$ 为从 E 到 E 保持 M 上的纤维的 $G-$ 等变光滑映射全体，即 $\{f : E \to E| f$ 光滑，$f(xg) = f(x)g$，$\pi(x) = \pi(y) \leftrightarrow \pi(f(x)) = \pi(f(y))$，$\forall g \in G$，$x$，$y \in E\}$. 显见 $\mathscr{G}$ 为 $Aut(E)$ 的子群. 我们不难得到以下正合列

$$1 \to \mathscr{G} \to Aut(E) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

其中 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 为 M 到 M 上的光滑双射. 正合列的右端一般不是满射.

在 $p \in M$ 的纤维 $\pi^{-1}(p) \simeq G$ 上，f 成为一个 G 的自同构. 反过来，G 上的内自同构，亦即共轭作用 $g \cdot h = ghg^{-1}$，为 G 上一个左作用. 由 §1 中诱导纤维丛的技术，即得到例中的群丛 E_{iG}. M 到 E_{iG} 上的截面将给出一个规范变换.

我们不加证明的给出如下定理 [7]:

Theorem 2.54. 记 $\Gamma^\infty(M, E_{iG}) = \{s : M \to E_{iG}| s$ 光滑 $\}$;

$\mathcal{C}^\infty(E, G_{Ad})^G = \{\psi : E \to G| \psi$ 光滑 $, \psi(xg) = g^{-1}\psi(x)g, \forall g \in G, x \in E\}$. 其中 G_{Ad} 表示 G 在自身上取共轭作用，则上标 G 的含义即为 $G-$ 等变.

则以下映射皆为双射.

$$\Gamma^\infty(M, E_{iG}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(E, G_{Ad})^G \longrightarrow \mathscr{G}$$

$$\psi \longmapsto (x \mapsto x\psi(x))$$

$$s \longmapsto (x \mapsto g,\ [(x, g)] = s(\pi(x)))$$

作为 Lie 群，我们自然会考虑 $\mathscr{G}$ 和 $Aut(E)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{i}$ 和 $\mathfrak{h}$. 对一族被连续参数化的变换 $f_t \in Aut(E)$，我们考虑其在 $x \in E$ 处的取值并求其切向量

场 X，有

$$\begin{aligned} X_{xg} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_t(xg) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_t(x)g \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} R_g \circ f_t(x) \\ &= (R_g)_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_t(x) \\ &= (R_g)_*(X_x) \end{aligned}$$

故 $\mathfrak{h}$ 其实就是 $\mathfrak{X}(E)^G = \{X \in \Gamma(TE) | X_{xg} = (R_g)_*(X_g)\}$. 对 $\mathfrak{i}$，注意到 $\pi_*(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \pi \circ f_t(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \pi(x) = 0$，故 $\mathfrak{i}$ 应为 $\mathfrak{X}(E)^G$ 中处处为垂直切向量的截面. 仿照群上的结果，我们有正合列

$$0 \to \mathfrak{i} \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{X}(M) \to 0$$

最后的满射可由局部平凡化及 M 上的单位分解得到.

设 ω 为 $G-$ 主丛 E 上一联络，局部地，为表示规范变换 f 在一联络 ω 上的拉回，取其对应的 $\psi \in \mathcal{C}^\infty(E, G_{Ad})^G$ 可表示为 [7]：

$$f^*\omega = Ad_\psi^{-1} \circ \omega + \phi^{-1} d\psi$$

为了后面的应用，我们现在讨论联络的自对偶.

对 E 上的联络 ω，已经定义其曲率 $F_\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^2(E, \mathfrak{g})$，定理 1.12 保证其可对应为 $\Omega^2(M, Ad_E)$ 中元素. 注意到 $\mathfrak{g}$ 为一个向量空间，故 Ad_E 是一个向量丛. 我们立刻有 Hodge$*$ 理论，并应用到此曲率形式上. 取 M 为四维 Riemann 流形，则有直和分解 $\Omega^2(M, Ad_E) = \Omega^2_+(M, Ad_E) \oplus \Omega^2_-(M, Ad_E)$, $\Omega^2_\pm(M, Ad_E)$ 分别为 $* = \pm 1$ 的特征空间.

Definition 2.55. *我们称一个联络 $\omega \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ 是自对偶的，若 $F_\omega \in \Omega^2_+(M, Ad_E)$. 若定义 $p_-(\alpha) = \alpha - *\alpha$，此即*

$$p_-(F_\omega) = 0$$

在 $\Omega^2(M, Ad_E)$ 上，p_- 为平行于 $\Omega^2_+(M, Ad_E)$ 向 $\Omega^2_-(M, Ad_E)$ 的投影.

2.4. **反函数定理.** [5]

Theorem 2.56. *设 $F : M \to N$ 为 Hilbert 流形间的光滑映射，DF 在任意 $m \in M$ 处都是一个 Fredholm 映射. 那么存在 $U = U_1 \times U_2$ 为 m 的开邻域，及其像集的分解 $F(m) = (n_1, n_2) \in F(U) = V_1 \times V_2$，其中 U_2，V_2 为有限维流形，使得*

- $F(u_1,u_2)=(F_1(u_1),F_2(u_1,u_2))$, $F_1:U_1\to V_1$ 为微分同胚;
- $\Phi:U_2\to V_2$, 定义为 $\Phi(u_2)=F_2(F_1^{-1}(b_1),b_2)$ 为一个微分同胚.

若 DF_m 为满射, 则进一步有 U_2 为一个有限维光滑流形, 其维数为 $\ker DF_m$.

3. 可积性定理的应用

3.1. **基本的可积性命题.** 这一部分, 我们考虑的所谓可积性是指一个微分方程局部上解的存在性, 使得一些逐点性质可以在一个局部坐标领域里写出来. 这一方面最经典的定理是所有微分流形课程中都必然学习的 Frobenius 可积性定理, 有两种版本分别陈述如下:

Definition 3.1. *我们称 L^h 是光滑流形 M 的开集 U 上的一个 h 维分布, 若 U 上存在 h 个处处线性无关的光滑切向量场 $X_1,...,X_h$, 使得 $\forall q\in U$,$L^h(q)$ 被 $X_1(q),...,X_h(q)$ 张成.*

那么定理可以被陈述如下:

Theorem 3.2. *设 $L^h=\{X_1,...,X_h\}$ 是 $U\subset M$ 上的一个 h 维光滑分布. 则对于任意 $p\in U$, 存在 p 附近的局部坐标 w 于 $W\subset U$ 上, 使得*

$$L^h|_W=\{\frac{\partial}{\partial w^1},...,\frac{\partial}{\partial w^h}\},$$

当且仅当 $[X_\alpha,X_\beta]\in L^h$, 对于任意的 $\alpha,\beta=1,...,h$.

具体的证明可以参考 [3]. 利用余切丛, 我们可以把整个定理改写成另一种等价版本. 为此, 我们的考虑是把 $L^h(p)$ 等价地考虑到其零化空间 $L^h(p)^\perp\subset T_p^*M$. 设 $m=\dim M$, 从而我们实际上可以考虑 $m-h$ 个 1-形式 ω_s, 则分布 L^h 实际上等价于这些 $\omega_s=0$, 不妨编号为 $h+1,...,m$. 定理条件中的保持 Lie 括号也需要改写成使用楔积和 de Rham 算子表达的形式, 即为

$$\mathrm{d}\omega_s=\sum_{t=h+1}^{m}\alpha_{st}\wedge\omega_t,$$

其中 α_{st} 是一些 1-形式. 此后, 我们论述的一个可积性命题也将会使用这种版本, 即在余切丛上进行考虑.

在本节中, 我们的设定便是考虑一个由一阶微分算子 $\overline{\mathrm{D}}:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 给出的丛. 粗糙地来说, 我们考虑的实际上是求解 $\overline{\mathrm{D}}s=0$ 这样的截面方程, 具体操作的时候, 我们通过射流丛 (jet bundle) 来将这样的算子变成线性算子, 然后在逐点意义下解方程/取纤维, 最后给出一个可积性命题来说明这何时可以可积.

为此, 在给出丰富的构造之前, 我们先定义所谓的射流丛. 它的核心思想就是把截面的所有导数都陈列出来, 变成逐点的信息. 考虑 E 是 M 上的一个向量丛, 则任取 $x \in M$, 定义 $\Gamma_x(E)$ 是所有在 x 处光滑的 E 的截面. 注意这同时还是一个 $C^\infty(M)$-模. 我们定义其子模 $\Gamma_x^k(E)$ 是前 k 阶 (包括第 k 阶) 的所有在 x 处导数都为 0 的那些截面. 则在 $J_k(E)$ 在 x 处的纤维便是 $\Gamma_x(E)/\Gamma_x^k(E)$. 对于本节, 我们要关心的是一阶射流丛 $J_1(E)$. 注意到在局部上, 我们可以把 $J_1(E)$ 视为 E 和 $E \otimes \Lambda^1$ 的直和, 这会为将来的局部计算提供极大的便宜.

设 E 是一个向量丛, 此处视为实向量丛. 一个 E 的截面 s 通过对偶变成 $s^\vee$, 视为对偶丛 E^* 上的连续函数, 定义为 $s^\vee(\epsilon_x) = \epsilon_x(s(x))$. 为了方便, 我们给出局部的参数化. 设 E 的局部标架场 $(e_1, ..., e_n)$ 及其对偶基 $(\epsilon_1, ...\epsilon_n)$, 换言之,$E^*$ 的局部标架场, 则我们可以参数化之形如:$(\lambda_1, ..., \lambda_n, x) \mapsto \sum_i \lambda_i \epsilon_i(x) \in E^*$. 若截面 s 局部上可以写为 $s = \sum_i f_i e_i$, 则有

$$s^\vee(\lambda_1, ..., \lambda_n, x) = \sum \lambda_i f_i(x),$$

以及 $\mathrm{d}s^\vee = \sum \mathrm{d}\lambda_i f_i + \sum \lambda_i \mathrm{d} f_i$.

下面我们来定义接下来主要的研究对象 $V(\overline{\mathrm{D}})$, 这将是 T^*E^* 的一个子丛; 而为了体现这是一阶微分算子, 我们会引入一阶射流丛 $J_1(E)$. 为了把 X 上的一阶射流丛变成 E^* 上的丛, 我们利用投影映照 $p : E^* \to X$, 使用拉回得到 $p^*J_1(E)$ 是为 E^* 上的丛. 为了使得这个丛变成 T^*E^* 的子丛, 我们寻求向量丛之间的同态 $V : p^*J_1(E) \to T^*E^*$. 由于此前的讨论, 有着最自然的定义方式 $V(p^*j_1(s)) = \mathrm{d}s^\vee$. 此前我们知道局部上 $E \otimes \Lambda^1 \subset J_1(E)$, 我们可以把这个映射具体写为

$$V((e_x \otimes \alpha_x)_{\epsilon_x}) = -\epsilon_x(e_x) p^* \alpha_x \in (T^*E^*)_{\epsilon_x}.$$

而我们的一阶微分算子 $\overline{\mathrm{D}}$ 实际上就是 $J_1(E) \to F$ 的向量丛之间的同态, 我们把其核记作 R, 则所谓的 $V(\overline{\mathrm{D}})$ 就定义为 $V(p^*R)$.

下面我们来具体计算一个例子, 即取 $\overline{\mathrm{D}}$ 就是协变导数 ∇, 局部上, 我们可以有局部联络方阵 ω_{ij}, 使得对于给定的局部标架场 (e_i), 有 $\nabla e_i = \sum \omega_{ij} \otimes e_j$. 所谓其核, 实际上就是形如 $\nabla s = 0$ 的截面. 设 $s = \sum f_i e_i$, 则有

$$0 = \nabla s = \sum_i \mathrm{d} f_i \otimes e_i + \sum_j f_j \sum_i \omega_{ji} \otimes e_i,$$

即满足 $\mathrm{d}f_i + \sum_j f_j\omega_{ji} = 0$. 但是注意到 $V(\overline{\mathrm{D}})$ 中的元素则应该是形如 $\mathrm{d}s^\vee$, 所以我们仍然需要进行计算

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^\vee &= \sum_i \mathrm{d}\lambda_i f_i + \sum_i \lambda_i \mathrm{d}f_i \\ &= \sum_i \mathrm{d}\lambda_i f_i - \sum_i \lambda_i \sum_j f_j\omega_{ji} \\ &= \sum_i \mathrm{d}\lambda_i f_i - \sum_j \lambda_j \sum_i f_i\omega_{ij} \\ &= \sum_i f_i(\mathrm{d}\lambda_i - \sum_j \lambda_j\omega_{ij}).\end{aligned}$$

换言之, 我们可以用诸 $\theta_i = \mathrm{d}\lambda_i - \sum_j \lambda_j\omega_{ij}$ 来张出 $V(\overline{\mathrm{D}})$.

接下来我们考虑形式更为一般的算子 $\overline{\mathrm{D}} = \sigma\nabla$, 其中 $\sigma : E\otimes\Lambda^1 \to F$ 称为 $\overline{\mathrm{D}}$ 的符号. 记 $S_1 = R\cap E\otimes\Lambda^1$ 为这个符号的核, 而 $S_2 \subset E\otimes\Lambda^2$ 是 $S_1\otimes\Lambda^1$ 在楔积下张成的, 即其中是形如 $\sum s_i\wedge\alpha_i$ 的元素. 我们下面陈述这个有力的命题, 并未来将使用这个命题用于具体的问题.

Proposition 3.3. *$V(\overline{\mathrm{D}}) \subset T^*(E^*\backslash 0)$ 是可积的, 当且仅当如下两条成立*

- $\mathrm{D}_1\Gamma(S_1) \subset \Gamma(S_2)$;
- $\Omega\Gamma(E) \subset \Gamma(S_2)$.

我们来解释一下一些记号上的问题. 通过协变导数 ∇, 我们可以自然定义 1-形式到 2-形式的映射 D_1 和 0-形式到 2-形式的映射 Ω. 其中分别定义为 $\mathrm{D}_1(e\otimes\alpha) = \nabla e\wedge\alpha + e\otimes\mathrm{d}\alpha$ 和 $\Omega = \mathrm{D}_1\nabla$.

证明. 对于一个余切丛上的分布 $V = V(\overline{\mathrm{D}})$, 我们通过 $\mathrm{d}v = \sum v_i\wedge\alpha_i$ 来表达可积性, 其中 $v, v_i \in \Gamma(V)$. 换言之, 可以形如原命题地表述为 $\mathrm{d}\Gamma(V) \subset \Gamma(V_2)$, 其中 V_2 是 $V\otimes\Lambda^1$ 通过楔积张成的.

由于 $\overline{\mathrm{D}} = \sigma\nabla$, 故而有 $V(\overline{\mathrm{D}}) = V(p^*(S_1\oplus E))$, 直观上便是, 一部分是 σ 的核, 还有一部分是 ∇ 的核. 后者已经在前面进行了计算, 由诸 θ_i 张出. 我们设 S_1 由 $\sigma_i = \sum_{jk} s_{ijk}e_j\otimes\mathrm{d}x_k$ 张出, 则通过投影映射 p 拉回之后得到 $\sigma_i^\vee = \sum_{jk} s_{ijk}\lambda_j\mathrm{d}x_k$ 张出前者.

注意到 $T^*(E^*\backslash 0)$ 局部上被 $\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}\lambda_j$ 张出, 或者实际上可以等价选取为 θ_i 和 $\mathrm{d}x_i$. 因此我们知道,V_2 可以由 $\theta_i\wedge\theta_j, \theta_i\wedge\mathrm{d}x_j, \sigma_i^\vee\wedge\mathrm{d}x_j, \sigma_i^\vee\wedge\theta_j$ 张成. 但是我们可以用 $\theta_i\wedge\mathrm{d}x_j$ 得到 $\sigma_i^\vee\wedge\theta_j$, 因而我们只需要考虑前三者. 此处我们知道 $V(S_2)$ 由 $\sigma_i^\vee\wedge\mathrm{d}x_j$ 张成.

为了验证 $\mathrm{d}\Gamma(V) \subset \Gamma(V_2)$ 的这样的可积性条件, 现在我们计算 $\mathrm{d}\theta_i$ 和 $\mathrm{d}\sigma_i^\vee$, 尽量写成 $\theta_i\wedge\theta_j, \theta_i\wedge\mathrm{d}x_j, \sigma_i^\vee\wedge\mathrm{d}x_j$ 张出来的形式.

首先计算 $\mathrm{d}\theta_i$, 具体的流程如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta_i &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\lambda_i - \sum_j \lambda_j\omega_{ij}) \\
&= -\sum_j \lambda_i \mathrm{d}\omega_{ij} - \sum_j \mathrm{d}\lambda_j \wedge \omega_{ij} \\
(\text{代回}\theta_i\text{的定义}) &= -\sum_j \lambda_i \mathrm{d}\omega_{ij} - \sum_j \omega_{jk}\wedge\omega_{ij}\lambda_k - \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ij} \\
(\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega\wedge\omega) &= -\sum_k \lambda_k \Omega_{ik} - \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ij}.
\end{aligned}$$

我们知道第二项已经属于 V_2 的截面了, 因为所谓局部联络方阵也不过是 $\mathrm{d}x_i$ 组合出来的. 而第一项, 为了其属于 V_2 的截面, 我们应当注意到 λ_i 给出的是 X 上向量丛 E 的参数化. 现在我们回到底流形是 X 的时候, 便可以发现第二项属于 V_2 的截面等价于 Ω 把 E 的截面变成 S_2 的截面, 这样通过投影映照 $p: E^* \to X$ 拉回再通过 V 映射到 E^* 的余切丛时恰好在 V_2 中, 即 $\Omega\Gamma(E) \subset \Gamma(S_2)$.

在计算另一部分之前, 我们可以先提前计算一下 $\mathrm{D}_1\sigma_i$, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_1\sigma_i &= \mathrm{D}_1(\sum_{jk} s_{ijk} e_j \otimes \mathrm{d}x_k) \\
&= \sum_{jk} s_{ijk} \nabla e_j \wedge \mathrm{d}x_k + \sum_{jk} e_j \otimes \mathrm{d}s_{ijk} \wedge \mathrm{d}x_k \\
&= \sum_{jk} s_{ijk} \sum_m \omega_{jm} \otimes e_m \wedge \mathrm{d}x_k + \sum_{jk} e_j \otimes \mathrm{d}s_{ijk}\wedge \mathrm{d}x_k,
\end{aligned}$$

因而有 $(\mathrm{D}_1\sigma_i)^\vee = \sum_{jk} s_{ijk} \sum_m \omega_{jm}\lambda_m \mathrm{d}x_k + \sum_{jk} \lambda_j \mathrm{d}s_{ijk} \wedge \mathrm{d}x_k$. 在计算时, 我们在 E^* 的余切丛上工作, 因此要考虑后者; 在对照题设条件时, 我们的底流形是 X, 仍然需要前者. 下面回到主要的计算, 为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_i^\vee &= \sum_{jk} s_{ijk} \mathrm{d}\lambda_j \wedge \mathrm{d}x_k + \sum_{jk} \lambda_j \mathrm{d}s_{ijk} \wedge \mathrm{d}x_k \\
(\text{代回}\theta_i\text{的定义}) &= \sum_{jk} s_{ijk}\theta_j \wedge \mathrm{d}x_k + \sum_{jk} s_{ijk} \sum_m \omega_{jm}\lambda_m \wedge \mathrm{d}x_k + \sum_{jk} \lambda_j \mathrm{d}s_{ijk} \wedge \mathrm{d}x_k \\
(\text{代入}(\mathrm{D}_1\sigma_i)^\vee) &= \sum_{jk} s_{ijk}\theta_j \wedge \mathrm{d}x_k + (\mathrm{D}_1\sigma_i)^\vee.
\end{aligned}$$

因此, 希望 $(\mathrm{D}_1\sigma_i)^\vee$ 是 V_2 的截面, 等价于希望 $\mathrm{D}_1\sigma_i$ 是 S_2 的截面, 这就是第一个条件 $\mathrm{D}_1\Gamma(S_1) \subset \Gamma(S_2)$. 总而言之, 我们通过具体的计算, 证明了命题中的当且仅当. □

3.2. **可积性命题的应用.**

Theorem 3.4. *设 X 是定向 4 维流形。则 X 上的一个共形结构自然定义出 $P(V_-)$ 的一个近复结构，该近复结构可积当且仅当 $W_- = 0$ 即 X 是自对偶的。(注：4 维 Spin 表示可以看做正交群上的射影表示，所以不用假设流形是 Spin 流形)*

证明. 先说明注记中的事实，考虑 Spin 表示 $\rho : Spin(4) \to GL(V)$，而 $\rho(-1) = -Id$，考虑与商映射 $\pi + GL(V) \to GL(V)/\mathbb{C}^*$ 复合，则 $\pi\rho(1) = \pi\rho(-1)$，所以诱导映射 $\rho' : SO(4) \to GL(V)/\mathbb{C}^* = PGL(V)$，其中 $PGL(V)$ 是射影空间 $P(V)$ 的线性同构群，而 Spin 群在旋子上作用保持分次，所以可视为到 $P(V_-)$ 的同态，可利用配丛在不一定 Spin 的流形上构造整体的 $P(V_-)$ 丛。

由可积性是局部性质，所以可以局部考虑，在共形结构里选取一个黎曼度量。由于所有流形局部上都有 Spin 结构，选定一个固定的 Spin 结构，局部有旋子丛 V_+, V_-。

V_- 上的 Dirac 算子可以看做联络和象征的复合如下

$$D : \Gamma(V_-)) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(V_- \otimes T^*X)) \xrightarrow{\sigma} \Gamma(V_+) \tag{3.1}$$

这是因为 Dirac 算子的定义为取标准基 Clifford 作用之和和计算 Dirac 算子象征便是 Clifford 作用的倍数。利用该定义方式定义扭算子如下

$$\bar{D} : \Gamma(V_-)) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(V_- \otimes T^*X)) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \Gamma(V_+^{\perp}) \tag{3.2}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是向 σ 的核的正交投影，即丛同态

$$\bar{\sigma} = 1 - \sigma^*\sigma : V_- \otimes T^*X \to V_+^{\perp} \tag{3.3}$$

$V_+^{\perp} \subset V_- \otimes T^*X$ 为投影的像。局部计算扭算子如下

$$\bar{D}\psi = \bar{\sigma}\nabla\psi \tag{3.4}$$

$$= \nabla\psi - \sigma^*(D\psi) \tag{3.5}$$

$$= \nabla\psi + \frac{1}{4}\sum e_i.D\psi \otimes e_i \tag{3.6}$$

最后一个等号只需证 $\sigma^*(x) = -\frac{1}{4}\sum e_i.x \otimes e_i, x \in (V_+)$，而右式内积 $u \otimes v \in V_- \otimes T^*X$ 为

$$< -\frac{1}{4}\sum e_i.x \otimes e_i, u \otimes v > = -\frac{1}{4}\sum < e_i.x, u >< e_i, v > \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{4}\sum < x, e_i.u >< e_i, v > \tag{3.8}$$

$$= \frac{1}{4} < x, v.u > \tag{3.9}$$

$$=< x, \sigma(u \otimes v) > \tag{3.10}$$

这里 Dirac 算子的象征为消除旋子维数做了一个乘 1/4 的处理。

有了这些准备工作，我们下一步需要把可积性定理应用在扭算子上，即要验证两个条件 $D_1\Gamma(S_1)\subset\Gamma(S_2), \Omega\Gamma(E)\subset\Gamma(S_2)$，下面局部刻画丛 S_1, S_2。

$S_1 = ker(\bar{\sigma})\subset V_-\otimes T^*X$ 恰巧为同态像

$$V_+\to V_-\otimes T^*X \tag{3.11}$$

$$\psi\mapsto\sum e_i.\psi\otimes e_i \tag{3.12}$$

该同态显然为单射, 像在 S_1 中, 计算维数可知映满 S_1, 所以 S_1 中截面局部上均可写为 $\sum e_i.\psi\otimes e_i$ 形式。$p: V_-^*\to U$ 为局部投影映射, 计算可以得出 $V(\bar{D}) = V(p^*S_1\oplus p^*V_-)$,其中 $V(\bar{D})$ 是 $T^*_{\mathbb{C}}(V_-^*\backslash 0)$ 的复 4 维子丛且满足 $V(\bar{D})\cap\overline{V(\bar{D})} = 0$ 则复化的余切丛的近复结构在 $V(\bar{D})$ 上定义了一个新的近复结构,$V: p^*(V_-\otimes T^*X)\to T^*V_-^*$ 为满足下述条件的映射。

$$V((e_x\otimes\alpha_x)_{\epsilon_x}) = -<e_x,\epsilon_x> p^*\alpha_x \tag{3.13}$$

先验证条件 $D_1\Gamma(S_1)\subset\Gamma(S_2)$，取 $\phi=\sum e_i.\psi\otimes e_i$, 而由 Levi-Civita 联络保持度量有

$$\nabla\phi = \sum e_i.\nabla\psi\otimes e_i \tag{3.14}$$

取诱导的联络有 $D_1 = A(\nabla)$，其中 A 为把二张量反交换化的算子，则诱导联络在 $\Gamma(S_1)$ 上作用为 $D_1(\phi) = \sum e_i.\nabla_j\psi\otimes e_j\wedge e_i$

S_2 中元素为下述映射的像

$$V_+\otimes\Lambda^1\to V_-\otimes\Lambda^2\psi\otimes\alpha\mapsto\sum e_i.\psi\otimes e_i\wedge\alpha \tag{3.15}$$

先证该映射在纤维上是单射, 若 $\sum\psi_j\otimes e_j$ 在核中, 则有 $\sum e_i.\psi_j\otimes e_i\wedge e_j = 0$, 则有 $e_i.\psi_j = e_j.\psi_i$ 对任意 $i\neq j$ 成立。于是有 $e_j.e_i.\psi_i = -e_ie_j\psi_i = -e_ie_i\psi_j = \psi_j$, 于是 $e_i.\psi_i = -e_j.\psi_j = 0$，而 $e_i\in Hom(V_+,V_-)$ 为同构，所以 $\psi_i = 0$，所以核平凡，于是该映射可视作嵌入映射。

$$V_+\otimes\Lambda^1\subset V_-\otimes\Lambda^2 \tag{3.16}$$

下面利用一些旋子的定义将所有丛典范同构于两个旋子张量积以方便刻画 S_2.

对于 Clifford 代数有同构

$$Cl_4 = \Lambda^0\oplus\Lambda^1\oplus\Lambda^2\oplus\Lambda^3\oplus\Lambda^4 \tag{3.17}$$

对于旋子模 $V = V_+\otimes V_-$ 有同构 $Cl_4\otimes\mathbb{C}\cong End(V)$

而在 V 上固定一个度量有

$$End(V) = V \otimes V^* = V \otimes V = V_+ \otimes V_+ \oplus V_- \otimes V_+ \oplus V_+ \otimes V_- \oplus V_- \otimes V_- \tag{3.18}$$

进一步分解为 $V_+ \otimes V_+ \cong S^2V_+ \oplus \Lambda^2 V_+$，而给定定向后有 $\Lambda^2 V^+ \cong \mathbb{C}$

下面我们利用该分解刻画外代数的分解。

复化的 Clifford 代数 1 分量作用交换分次，且外代数次数为 1 的恰巧为 $Hom(V_+, V_-) \oplus Hom(V_-, V_+)$ 中对称部分，外代数次数为 3 的分量是反对称部分，于是均可视作 $V_+ \otimes V_-$ 分量。

考虑 $0, 4$ 分次的作用，在两分量上分别是标量阵，对应的是 $\Lambda^2 V^+ \oplus \Lambda^2 V^-$ 项，所以 2 分量有自然同构 $\Lambda^2_{\mathbb{C}} \cong S^2V_+ \oplus S^2V_-$

综上，定义 S_2 的映射可以视为

$$V_+ \otimes \Lambda^1 \cong V_+ \otimes V_+ \otimes V_- \cong S^2V_+ \otimes V_- \oplus V_- \tag{3.19}$$

$$V_- \otimes \Lambda^2 \cong V_- \otimes (S^2V_+ \oplus S^2V_-) \cong (S^2V_+ \otimes V_-) \oplus V_- \oplus S^3V_- \tag{3.20}$$

且这里的所有同构和一开始构造的嵌入映射和右边自然的嵌入相合。于是 $\Omega\Gamma(V_-) \subset \Gamma(S_2)$ 当且仅当下述复合为 0

$$V_- \xrightarrow{\Omega} V_- \otimes \Lambda^2 \longrightarrow S^3V_- \tag{3.21}$$

该复合恰为曲率张量分解 S^4V_- 部分，即反自对偶 Weyl 张量为 0. 至此，我们利用可积性定理证明了 $V(\bar{D})$ 可积当且仅当 X 是自对偶的。

下面说明 $P(V_-)$ 的近复结构可积和 $V(\bar{D})$ 的关系。$V(\bar{D})$ 是 $T^*_{\mathbb{C}}(V^*_-\backslash 0)$ 的子丛，它在其上通过将该空间定义为 $T^{1,0}V^*_-\backslash 0$ 定义了一个良定的近复结构，而该丛对合当且仅当近复结构是可积的。而 $\mathbb{C}^*$ 作用和这个近复结构相容，所以该近复结构可以看做 $P(V_-)$ 上的近复结构，于是 $P(V_-)$ 上该近复结构可积当且仅当 X 是自对偶的。 □

Remark 3.5. *1.* *在共形结构中固定黎曼度量，则* $P(V_-)$ *的近复结构可以看的更清楚。利用* X *的 Levi-Civita 联络可以将* $P(V_-)$ *的切空间分解为水平和垂直部分，垂直部分就是纤维上的近复结构，就只是复射影直线自然的近复结构，水平部分是在余切丛自然利用 Clifford 作用定义出的一个近复结构。最后共形等价的度量会给出同样的近复结构，所以只需考虑共形结构。*

2. 在 Spin 流形的条件下， $V^*\backslash 0$ *可以视为* $P(V_-)$ *上的一个全纯线丛* H*，利用线丛的计算可知* $H^{-4} \cong K$*，其中* K *为* $P(V_-)$ *上的自然的全纯 3-形式线丛。*

$P(V_-) \to X$ *的纤维是复子流形，这些复子流形上的法丛作为实向量丛利用局*

部平凡化是平凡的，而作为全纯丛便不是了。固定纤维 $(V_-^*)_x$，坐标为 λ_1, λ_2，则法丛的对偶丛 N^* 是由 $\sigma_\alpha^\vee, \alpha = 1, 2$ 生成的

$$\sigma_\alpha^\vee = \sum < e_i.\psi_\alpha, \phi > e_i \tag{3.22}$$

其中 $\phi \in (V_-^*)_x, \psi_\alpha \in (V_+)_x$, 此时为 $\sigma_\alpha^\vee$ 良好定义的 N^* 全纯截面，在 ϕ 上线性可以推出法丛 N^* 可视为 $P(V_-)_x$ 上的丛，且生成丛 HN^* 。所以 HN^* 为平凡丛，射影直线上的向量丛都可以分解为线丛直和，所以 $N \cong H \oplus H$, 下面计算法丛的全纯截面全体，即第 *0* 个层上同调群。

$$H^0(P(V_-)_x, \mathcal{O}(N)) \cong (V_+)_x^* \otimes (V_-)_x \cong (\Lambda_{\mathbb{C}}^1)_x \tag{3.23}$$

这个结果的证明略去，可以说明法丛作为全纯丛是非平凡的。

总结一下，该定理在 *4* 维自对偶流形的一个 $\mathbb{CP}^1$ 丛上定义了一个复结构，而额外的共形结构给出的是一个实结构 (即复线性空间有共轭运算) τ 如下，该结构是用 V_- 的四元数结构诱导的。

$$\tau : P(V_-) \to P(V_-) \tag{3.24}$$

在定理条件下，该实结构没有不动点，不过保持纤维。

例子 3.6. *1.* $X = \mathbb{R}^4$ 配备平坦共形结构，则 $P(V_-) = S^2 \times \mathbb{R}^4$。其复结构正好是作为全纯丛 $H \oplus H$ 的全空间。
2. $X = S^4$，则 $P(V_-) = \mathbb{CP}^3$，纤维都是 $\mathbb{CP}^3$ 中的直线，而 $\mathbb{CP}^3$ 中所有射影直线被 *Klein* 二次式 Q_4 刻画，有嵌入 $S^4 \subset Q_4$，此时 S^4 中元素对应的每个射影直线互不相交，全体恰好拼成 $\mathbb{CP}^3$。
3. $X = \mathbb{CP}^2$，则 $P(V_-) = F_3$，其中 F_3 是旗流形。定义如下

$$F_3 = \{(x, l) \| x \in \mathbb{CP}^2, l \subset \mathbb{CP}^2, l\text{为射影直线}\} \tag{3.25}$$

4. 自对偶模空间的局部结构

我们已经认识了主丛上的自对偶结构，接下去我们将考虑此自对偶结构下的联络的整体. 以下沿用之前的记号.

首先，E 是一个 $G-$ 主丛，注意到若 $H \leq G$ 为 G 的闭子群，则 E 自然将成为一个 $H-$ 主丛（底空间未必仍是 M）. 记 Lie 群 H 的 Lie 代数为 $\mathfrak{h}$，显见 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. 那么 E 作为 $H-$ 主丛的联络全体 $\Omega^1(E, \mathfrak{h})$ 作为集合包含于 $\subset \Omega^1(E, \mathfrak{g})$，且在 M 所对应的纤维上稳定.

$H_x = \ker \omega_x = \left\{ X = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mid f(0) = x\text{且}\Im f \subset xH \right\}$，则

$$(R_g)_* X = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_g \circ f)\right|_{t=0} \in \ker \omega_{xg}$$

，故 $(R_g)_* H_x \subset H_{xg}$. 又由维数相等，知 $(R_g)_*$ 诱导垂直子空间之间的同构. 至此 ω 成为 E 作为 $G-$ 主丛的联络.

E 上这样的联络某种意义上并不是“本质”的，因为它可约化到有更小结构群的主丛上，而非一定要生长在 E 上. 我们接下去将不考虑这一部分联络，并称 E 上不可约化到 G 的一个真闭子群的联络为不可约的.

显见那些只相差一个规范变换的联络应当被视为相同的，而规范变换作为主丛 E 上的自同构会诱导联络之间的一个等价关系，因此我们只考虑 E 上自对偶联络对于此等价关系的商空间。并给出如下定义。

Definition 4.1. *$S = \{\omega \in \Omega^1(E,\mathfrak{g}) | \omega$ 自对偶且不可约 $\}/\sim$，其中 $\sim$ 为 1.14 中定义. S 被称为 E 上不可约自对偶联络的模空间.*

Atiyah，Hitchin 与 Singer 在 1978 年发表的论文中给出了一个定理：

Theorem 4.2. *G 为紧半单 Lie 群，E 为四维自对偶 Riemann 流形 X 上的 $G-$ 主丛，则若 S 非空，则 S 为一个微分流形，维数为 $p_1(Ad_E) - \frac{1}{2}\dim G(\chi - \tau)$. 其中 p_1 为第一 Pontrjagin 类，Ad_E 为 E 的伴随丛，χ 为 M 的 Euler 示性数，τ 为 M 的符号.*

这一部分我们的目标是叙述此定理的一部分结果，计算 S 的维数并给出 S 局部上的流形结构.

4.1. **无穷小形变.** 首先我们来计算 S 的切空间. 在一个不可约自对偶联络 ω 处，考虑一族被光滑参数化的不可约自对偶联络 $(\omega_t)_t$，其中 $\omega_0 = \omega$. 记其曲率为 $(\Omega_t)_t$，差为 $\tau_t = \omega_t - \omega_0$. 证明的核心是考虑复形

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(E,\mathfrak{g}) \arrow[r, "d_0"] & \Omega^1(E,\mathfrak{g}) \arrow[r, "p_- \circ d_1"] \arrow[dr, dashed, "d_1"'] & \Omega^2_-(E,\mathfrak{g}) \arrow[r] & 0 \\
& & & \Omega^2(E,\mathfrak{g}) \arrow[u, "p_-"'] &
\end{tikzcd}$$

我们用下标区分其中的微分算子，其中 d_0 即为自对偶联络 ω 所给出的共变导数，d_1 为 d_0 在 1-形式上的自然扩张. 这是一个复形，是因为 $(p_- \circ d_1) \circ d_0 = p_- \circ (d_1 \circ d_0) = p_- \circ \Omega = 0$.

由曲率的表示，我们有

$$\Omega_t - \Omega_0 = d_1 \tau_t + \frac{1}{2}[\tau_t, \tau_t]$$

由自对偶性，

$$0 = p_-(\Omega_t - \Omega_0) = p_-\left(d_1\tau_t + \frac{1}{2}[\tau_t,\tau_t]\right) = p_- \circ d_1(\tau_t) + \frac{1}{2}p_-([\tau_t,\tau_t])$$

为得到切向量，我们对 t 求导并取 $t=0$，有

$$\begin{aligned}0=&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left(p_-\circ d_1(\tau_t)+\frac{1}{2}p_-([\tau_t,\tau_t])\right)\\=&p_-\circ d_1\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\tau_t\right)+\frac{1}{2}p_-\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\tau_t,\tau_t]\right)\\=&p_-\circ d_1(\dot{\tau})+\frac{1}{2}p_-\left(\lim_{t\to 0}\frac{[\tau_t,\tau_t]}{t}\right)\\=&p_-\circ d_1(\dot{\tau})+\frac{1}{2}p_-(0)\\=&p_-\circ d_1(\dot{\tau})\end{aligned}$$

其中我们关心的切向量，被记作 $\dot{\tau}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\tau_t$ 为一 1-形式，上式告诉我们它属于 $p_-\circ d_1$ 的核.

上述计算还没有考虑等价关系，即联络之间相差一个规范变换所引起的变化. 为此，我们假设 $(\omega_t)_t$ 由一族被光滑参数化的规范变换 $(f_t)_t$ 给出，即 $\omega_t=f_t^*(\omega)$. 特别地，$f_0=id_E$. 记 $\dot{f}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f_t\in\Omega^0(E,\mathfrak{g})$.

为了计算 $t=0$ 处导数，我们考虑其在 $x\in E$，$v=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\gamma\in T_xE$ 处取值，

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f_t^*(\omega))_x(v)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(Ad_{\psi_t}^{-1}\circ\omega+\psi_t^{-1}d\psi_t)_x(v)=d_0\dot{f}_x(v)$$

即 $\dot{\tau}$ 为 d_0 的像. 因此我们作出合理的推测，复形 $0\to\Omega^0(E,\mathfrak{g})\xrightarrow{d_0}\Omega^1(E,\mathfrak{g})\xrightarrow{p_-\circ d_1}\Omega^2_-(E,\mathfrak{g})\to 0$ 的上同调群 H^1 即为其切空间，我们将在第二部分证明这一点. 接下去我们先计算 $h^1=\dim H^1$ 即 H^1 的维数. 为此，记 $h^0=\dim H^0$，$h^2=\dim H^2$.

对 H^0，$B^0=0$，Z^0 则为从 T_E 到 $\mathfrak{g}$ 的联络 ω 意义下的常截面. 我们有如下定理 [6]:

Theorem 4.3 (约化定理)**.** *设 M 连通且仿紧. 对 $G-$ 主丛 (E,π,M)，带上一个联络 ω. 设 x_0 为 E 上一点，$\Phi(x_0)$ 为 E 在 x_0 处的和乐群，$E(x_0)=\{x\in E|$ 存在水平的曲线连接 u 和 $u_0\}$. 则 $E(x_0)$ 可约化为 $\Phi(x_0)-$ 主丛，ω 约化为其上的联络.*

Theorem 4.4 (和乐定理)**.** *记号同上. Ω 为 ω 的曲率，则 $\Phi(x_0)$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$ 的子 Lie 代数，由 $\{\Omega_v(X,Y)|\,v\in E(x_0),X,Y$ 为 v 水平向量 $\}$ 张成.*

对这样的截面 s，主丛上的约化定理告诉我们，ω 约化到 $E(x_0)=E$ 作为 $\Phi(x_0)-$ 主丛上的联络. 由假设，ω 不可约，故此为 E 上的和乐群处处为 G，其 Lie 代数即为 $\mathfrak{g}$. 将 s 看作 $Aut(E)$ 上的截面，则 s 的特征值是常数. 对半单

Lie 代数 G，若 s 不对应到 $C(G)$ 中的元素，则必有不同特征值，由其不同特征值的特征子空间的分解即得 E 的直和分解，与 ω 不可约矛盾. 又由 G 为半单的，$C(G)$ 为 0 维. 故 $h^0 = 0$.

我们引用一个来自 Atiyah 的消没定理，以说明 $h^2 = 0$.

Theorem 4.5. *设 $D = \nabla \circ C : V \otimes E \to V \otimes E$ 为一个旋量丛上的 Dirac 算子，其中 ∇ 为联络诱导的共变导数，C 为 Clifford 模的乘法. 记 K 为 $V \otimes E$ 的曲率，若 $C(K)$ 是正定的，则 $D\psi = 0$ 蕴含 $\psi = 0$.*

利用 Riemann 流形上的形式伴随 d_0^*，我们将原复形改写为 $D = p_- \circ d_1 + d_0^* : \Omega^1(E, \mathfrak{g}) \to \Omega^2_-(E, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^0(E, \mathfrak{g})$ 为一椭圆算子，则 $\mathrm{index}D = -h^0 + h^1 - h^2 = h^1$. 为了计算 $\mathrm{index}D$，我们想到 Atiyah-Singer 指标定理.

故 $\dim H^1 = h^1 = \mathrm{index}D = p_1(\mathfrak{g}) - \frac{1}{2}\dim G(\chi - \tau)$.

4.2. **局部流形结构.** 接下去我们将在无穷小形变上积分，并说明 H^1 中元素都是由一族被光滑参数化的联络定义的. 在 $\Omega^1(E, \mathfrak{g})$ 中，一个自对偶联络可以被表述为方程

$$p_-(d_1\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau]) = 0$$

的解，记 $\Phi = \{\tau \in \Omega^1(E, \mathfrak{g}) | \, p_-(d_1\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau])$ 且 $d^*\tau = 0\}$. 为了记号上的统一，我们不再用下标区分对形式求导的微分算子 d，且作用在 1-形式上时应复合上反自对偶投影.

考虑 Laplace 算子 $\Delta = d^*d + dd^*$，将 $\Omega^*(E, \mathfrak{g})$ 分成其核——调和形式及其正交子空间. 记 H 为到调和形式的正交投影，G 为 Δ 的 Green 算子，则 $G\Delta = 1 - H$. 定义 $F : \Phi \to \Omega^1(E, \mathfrak{g})$，使得 $F(\tau) = \tau + \frac{1}{2}Gd^*p_-([\tau, \tau])$. F 是个椭圆的 Fredholm 算子.

$$\begin{aligned}
d(F(\tau)) =& d\tau + \frac{1}{2}dGd^*p_-([\tau, \tau]) \\
=& d\tau + \frac{1}{2}Gdd^*p_-([\tau, \tau]) \\
=& d\tau + \frac{1}{2}G(\Delta - d^*d)p_-([\tau, \tau]) \\
(h^2 = 0) =& d\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau] - Hp_-(d\alpha) - Gd^*dp_(d\alpha) \\
=& d\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau]
\end{aligned}$$

同理有 $d^*(F(\tau)) = d^*\tau$. 综上，$\Delta F(\tau) = \Delta\tau + \frac{1}{2}d^*p_-([\tau, \tau]) = 0$，即 F 定义了一个从 Φ 到 $\Omega^1(E, \mathfrak{g})$ 中调和形式，即 H^1 的映射. 由其光滑性及紧性，我们可以在 $\Omega^1(E, \mathfrak{g})$ 上给出一个 Sobolev 范数，由 Sobolev 不等式，我们可以将 F

延拓定义到 $\Omega^1(E,\mathfrak{g})$ 的完备化上. 注意到 F 在 $\tau=0$ 处的微分为恒等映射, 由反函数定理, F^{-1} 在 H^1 上给出 $\mathit{\Phi}$ 的局部坐标.

为保证这确实是模空间 S 在 ω 附近的局部结构, 我们不加验证的给出如下结果:

- 任意自对偶联络与 ω 足够近 (Sobolev 范数意义下), 都规范等价到 Φ 中;
- 任意一族 ω 附近被光滑参数化的自对偶联络, 都规范等价到 Φ 中一族被光滑参数化的自对偶联络;
- Φ 中任意两个 ω 附近自对偶联络之间不为规范等价.

References

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, and Yu. I. Manin. Construction of instantons. *Phys. Lett. A*, 65(3):185–187, 1978.

[2] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 362(1711):425–461, 1978.

[3] S. S. Chern, W. H. Chen, and K. S. Lam. *Lectures on differential geometry*, volume 1 of *Series on University Mathematics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

[4] Johan Louis Dupont. Fibre bundles and chern-weil theory. 2003.

[5] Robert Friedman and John W. Morgan, editors. *Gauge theory and the topology of four-manifolds*, volume 4 of *IAS/Park City Mathematics Series*. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1998. Papers from the Summer School held in Park City, UT, July 10–30, 1994.

[6] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[7] Jacques Lafontaine. *An introduction to differential manifolds*. Springer, Cham, second edition, 2015.

[8] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.