中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

七维流形上的 G_2-结构

陈子安

2023 年 6 月

何为 Holonomy?

几何的一大哲学是通过研究对象上的结构反推对象的性质,
本论文所关心的 Holonomy 群便是这样的存在.
历史上 Holonomy 一词由 É. Cartan 引入几何学,

定义 1.1

设 X 为带有联络 ∇ 的流形, 取 $x \in X$. 则 x 点处的 Holonomy 群 $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ 是由 ∇ 诱导的平行移动生成的 $\mathrm{GL}(\mathrm{T}_x X)$ 的子集.

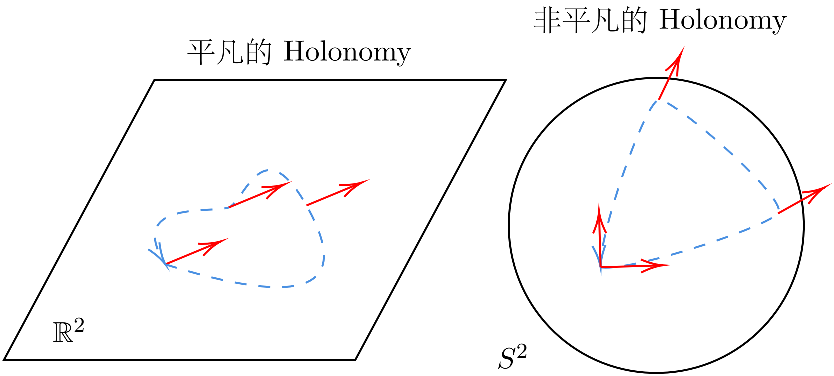
定义不能先验地保证 Holonomy「群」是群, 有

引理 1.2 (Borel, Lichnerowicz)

$\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ 为 $\mathrm{GL}(\mathrm{T}_x X)$ 的 Lie 子群.

大多时候, 联络是**由度规 g 所诱导的 Levi-Civita 联络**.

何为 Holonomy?(图)



切向量转过的角度恰是围成的区域的球面角

初步结果

连通流形各点处的 Holonomy 群间只相差共轭作用, 因而这样流形的 Holonomy 群共轭意义下可记为 $\mathrm{Hol}(\nabla)$ 或 $\mathrm{Hol}(g)$.
一个自然的问题是对 Holonomy 群的刻画, 有

定理 1.3 (Ambrose, Singer)

记号 X, ∇, x 与前文一致. 则 $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ 的 Lie 代数由 $\mathfrak{gl}(\mathrm{T}_x X)$ 的子集 $\{K_x(X,Y) | X, Y \in \mathrm{T}_x X\}$ 生成, 其中 K 为联络 ∇ 对应的曲率.

视 $\mathrm{Hol}_x(g)$ 到 $\mathrm{T}_x X$ 的作用为群的表示, 研究表示的可约性可进而得到**流形本身的可约性**, 并且该规约极大程度地保持了流形的度规信息, 为

定理 1.4 (de Rham)

设 (X, g) 为单连通 Riemann 流形且 $\mathrm{T}X = \oplus_{i=1}^k \mathrm{T}_i X$ 为 $\mathrm{Hol}(g)$ 的不可约直和分解. 则 X 局部等距同构于 $\prod_{i=1}^k V_i$, 其中 V_i 为 $\mathrm{T}_i X$ 对应的积分子流形, 且 $\mathrm{Hol}(g)$ 为诸积分子流形的 Holonomy 群之积.

分类定理

有了 de Rham 的约化定理, 人们开始探索不可约的 Riemann 流形.
第一个重要的结果是对所有可能的 Holonomy 群的分类, 是为

定理 1.5 (Berger(1955))

设 X 是不可约非局部对称 (即 $\nabla K \neq 0$) 的单连通 Riemann 流形, 则其上**可能的 Holonomy 群有如下表的完全分类**:

$\mathrm{Hol}(g)$	$\dim X$
$\mathrm{SO}(n)$	n
$\mathrm{U}(n)$	$2n$
$\mathrm{SU}(n)$	$2n$
$\mathrm{Sp}(n)$	$4n$
$\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$	$4n$
G_2	7
$\mathrm{Spin}(7)$	8

近代发展

现代几何可以归于该框架下, 如 $\mathrm{SU}(n)$ 对应 Calabi-Yau 流形.
本文研究的是 G_2 对应的流形, 人们把 G_2 和 Spin(7) 统称为例外群——对这两个群的研究是 Special Holonomy 方向的核心内容.
借助外微分系统的工具有**局部**的结果:

定理 1.6 (Bryant(1987))

存在单位球上的度量使得原点处的 Holonomy 群是例外群.

研究一些经典的几何对象, 如四维自对偶 Einstein 流形 (如 S^4 和 $\mathbb{CP}^2$) 上的反自对偶丛 Λ^2_- 或 S^3 上秩为 4 的 Spin 丛, 可得

定理 1.7 (Bryant, Salamon(1989))

存在以例外群为 Holonomy 群的**完备**流形.

近代发展

现代几何可以归于该框架下, 如 $\mathrm{SU}(n)$ 对应 Calabi-Yau 流形.
本文研究的是 G_2 对应的流形, 人们把 G_2 和 Spin(7) 统称为例外群——对这两个群的研究是 Special Holonomy 方向的核心内容.
借助外微分系统的工具有**局部**的结果:

定理 1.6 (Bryant(1987))

存在单位球上的度量使得原点处的 Holonomy 群是例外群.

研究一些经典的几何对象, 如四维自对偶 Einstein 流形 (如 S^4 和 $\mathbb{CP}^2$) 上的反自对偶丛 Λ^2_- 或 S^3 上秩为 4 的 Spin 丛, 可得

定理 1.7 (Bryant, Salamon(1989))

存在以例外群为 Holonomy 群的**完备**流形.

近代发展

现代几何可以归于该框架下, 如 $\mathrm{SU}(n)$ 对应 Calabi-Yau 流形.
本文研究的是 G_2 对应的流形, 人们把 G_2 和 $\mathrm{Spin}(7)$ 统称为例外群——对这两个群的研究是 Special Holonomy 方向的核心内容.
借助外微分系统的工具有**局部**的结果:

定理 1.6 (Bryant(1987))

存在单位球上的度量使得原点处的 Holonomy 群是例外群.

研究一些经典的几何对象, 如四维自对偶 Einstein 流形 (如 S^4 和 $\mathbb{CP}^2$) 上的反自对偶丛 Λ^2_- 或 S^3 上秩为 4 的 Spin 丛, 可得

定理 1.7 (Bryant, Salamon(1989))

存在以例外群为 Holonomy 群的**完备**流形.

近代发展

现代几何可以归于该框架下, 如 $\mathrm{SU}(n)$ 对应 Calabi-Yau 流形.
本文研究的是 G_2 对应的流形, 人们把 G_2 和 $\mathrm{Spin}(7)$ 统称为例外群——对这两个群的研究是 Special Holonomy 方向的核心内容.
借助外微分系统的工具有**局部**的结果:

定理 1.6 (Bryant(1987))

存在单位球上的度量使得原点处的 Holonomy 群是例外群.

研究一些经典的几何对象, 如四维自对偶 Einstein 流形 (如 S^4 和 $\mathbb{CP}^2$) 上的反自对偶丛 Λ^2_- 或 S^3 上秩为 4 的 Spin 丛, 可得

定理 1.7 (Bryant, Salamon(1989))

存在以例外群为 Holonomy 群的**完备**流形.

正文简介

本毕业论文的前半部分着眼于知识的准备和历史的讲叙, 相当于综述; 后半部分形如读书笔记, 则旨在学习理解如下定理的证明

定理 1.8 (Joyce(1995))

存在以 G_2 为 Holonomy 群的**紧致**流形.

个人的主要工作, 一方面在于对知识的搜索与梳理, 另一方面也是补充了许多 Special Holonomy 论文中缺失的细节, 尤其是各种局部计算的细节. 下面来正式浏览该定理的证明流程以及所需的前置知识.

G-结构

记 V 为线性空间, 其标架 $\mathrm{Fr}(V)$ 为其全体定向基的集合, 与 $\mathrm{GL}(V)$ 存在双射, 且可以被 $\mathrm{GL}(V)$ 右作用.
设 G 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群, 则 V 上一个 G-结构是 $\mathrm{Fr}(V)/G$ 是中一个元素.
记 X 为 n 维流形, 其切丛的标架丛记为 $\mathrm{Fr}(X)$. 再给定 G 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的子群, 则定义流形 X 上的一个 G-结构是**投影映照** $\mathrm{Fr}(X)/G \to X$ **的一个光滑截面**.

定义 2.1

固定 G-结构 σ, 记号 X, n 同上. 联络 ∇ 称为是与之相容的, 若在每一点 $x \in X$ 上任取标架 $e_x \in \sigma(x) \subset \mathrm{Fr}(\mathrm{T}_x X)$, 存在邻域 $U_x \subset M$ 使 ∇ 写为局部联络方阵 $\omega(U_x, e_x) \in \Omega^1(U_x, \mathfrak{gl}(n))$ 时总取值于 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中.

由此可如法炮制 Riemann 几何, 定义对应的曲率和挠率, 从而也可以自然定义诸如**平坦**和**无挠**等概念.

群 G_2

定义 $\varphi_0 = y_1\wedge y_2\wedge y_7 + y_1\wedge y_3\wedge y_6 + y_1\wedge y_4\wedge y_5 + y_2\wedge y_3\wedge y_5 - y_2\wedge y_4\wedge y_6 + y_3\wedge y_4\wedge y_7 + y_5\wedge y_6\wedge y_7 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$, 其中 $y_1,\cdots,y_7$ 是 $(\mathbb{R}^7)^*$ 的定向标准正交基, 内积为标准的欧氏内积.

定义 2.2

群 G_2 为所有保持 φ_0 不变的自同构 $\{g\in \mathrm{GL}(7) | g^*(\varphi_0)=\varphi_0\}$.

命题 2.3

群 G_2 为紧致连通且单连通的 14 维半单 Lie 群, 且群 G_2 对 $\mathbb{R}^7$ 的直接作用与对 $\mathfrak{g}_2$ 的共轭作用均是不可约的.

且记 φ_0 在 $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ 中 $\mathrm{GL}(7)$-轨道为 $\Lambda^3_+\mathbb{R}^7$, 而对于可定向的七维流形 X 同样可定义 Λ^3_+X. 维数计算指出这是 $\Lambda^3\mathrm{T}^*X$ 的**开子丛**且**截面定义了 X 上的 G_2-结构**, 且**每个 G_2-结构也同样定义了一个度规 g**.

群 G_2 的表示

今考察 G_2 作用到 $\Lambda^k\mathrm{T}^*X$ 作为群表示不可约分解，有

命题 2.4

设 X 是一个定向的 7-流形，给定的 3-形式 φ 定义了 X 上的 G_2-结构与度规 g 和度规诱导的 Hodge-$*$ 算子. 则从 $\Lambda^k\mathrm{T}^*X$ 如同下文列举般，正交地分裂为一些不可约 G_2-表示的分量:

(i) 从 $\Lambda^1\mathrm{T}^*X = \Lambda^1_7$ 而从 $\Lambda^6\mathrm{T}^*X = \Lambda^6_7$;

(ii) 从 $\Lambda^2\mathrm{T}^*X = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$ 而从 $\Lambda^5\mathrm{T}^*X = \Lambda^5_7 \oplus \Lambda^5_{14}$;

(iii) 从 $\Lambda^3\mathrm{T}^*X = \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}$ 而从 $\Lambda^4\mathrm{T}^*X = \Lambda^4_1 \oplus \Lambda^4_7 \oplus \Lambda^4_{27}$.

其中 $\Lambda^k_l \subset \Lambda^k\mathrm{T}^*X$ 的下标 l 表示其纤维的维数，而 $*$ 算子给出了 Λ^k_l 和 Λ^{7-k}_l 之间的等距同构.

此外，定义 π_l 表示到 l 维不可约子表示的正交投影.

G_2-结构

在详细的表示论信息下，辅以足量的计算，可得如下两命题

命题 2.5

令 X 是连通且单连通的 7 维紧流形，设其上存在一个无挠的 G_2-结构. 设 g 是该 G_2-结构诱导的度规，则必有 $\mathrm{Hol}(g) = G_2$.

命题 2.6

G_2-结构 $\varphi \in \Lambda^3_+ X$ 无挠当且仅当 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d} * \varphi = 0$.

时刻注意 $*$ 是由 g 诱导的，而 g 是由 φ 决定的. 因此上述命题的方程并非杨-Mills 方程，而是**非线性方程**. 算子 $\Theta : \Lambda^3_+ X \ni \varphi \mapsto *_\varphi \varphi$ 虽是为一个非线性算子，但是具有 $GL(7)$-等变的良好性质——如用代数的语言则可称为表示的同态，后面的论述中将因而使用 Schur 引理.

G_2-结构

在详细的表示论信息下，辅以足量的计算，可得如下两命题

命题 2.5

令 X 是连通且单连通的 7 维紧流形，设其上存在一个无挠的 G_2-结构. 设 g 是该 G_2-结构诱导的度规，则必有 $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{G}_2$.

命题 2.6

G_2-结构 $\varphi \in \Lambda^3_+ X$ 无挠当且仅当 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d} * \varphi = 0$.

时刻注意 $*$ 是由 g 诱导的，而 g 是由 φ 决定的. 因此上述命题的方程并非杨-Mills 方程，而是**非线性方程**. 算子 $\Theta : \Lambda^3_+ X \ni \varphi \mapsto *_\varphi \varphi$ 虽是为一个非线性算子，但是具有 $\mathrm{GL}(7)$-等变的良好性质——如用代数的语言则可称为表示的同态，后面的论述中将因而使用 Schur 引理.

四维 hyperKähler 流形

为了构造七维流形, 思路是作维数的分解 $7=4+3$. 借助 hyperKähler 刻画 4 维部分的详细性质, 同时让 3 维的部分尽量简洁.

定义 2.7

四维流形 X 上的 hyperKähler 结构是一个**三元组** $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, 其中诸 ω_i 是 X 上的光滑闭 2-形式, 且对 X 中任一点 x 它们可以写为

$$\omega_1 = y_1 \wedge y_4 + y_2 \wedge y_3, \omega_2 = y_1 \wedge y_3 - y_2 \wedge y_4, \omega_3 = y_1 \wedge y_2 + y_3 \wedge y_4,$$

其中 $(y_1, \cdots, y_4)$ 是 $\mathrm{T}_x^* X$ 的定向基.

可见与前文的关系为等式 $\varphi_0 = \omega_1 \wedge y_5 + \omega_2 \wedge y_6 + \omega_3 \wedge y_7 + y_5 \wedge y_6 \wedge y_7$. 从 Holonomy 的视角来说, 这是 SU(2)-Holonomy 的流形.

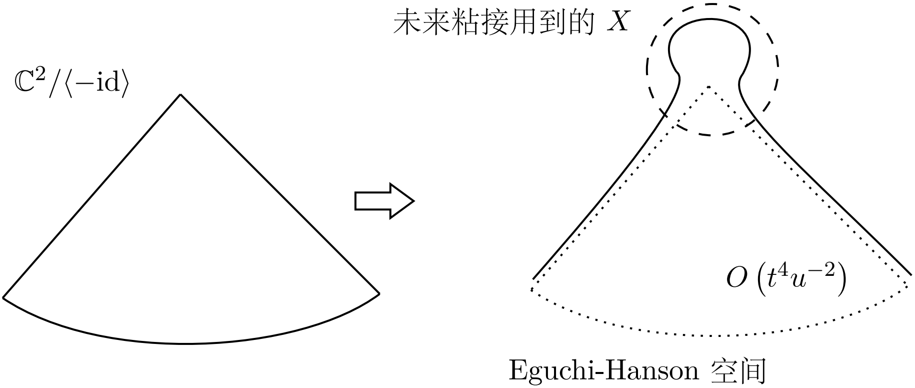
Eguchi-Hanson 空间

现在介绍一个典型的 hyperKähler 流形, 将会用于切除奇点后的粘贴. 考察 $\mathbb{C}^2$, 定义 $-\mathrm{id}$ 为全部坐标取负的反射. 考虑商空间 $\mathbb{C}^2/\langle -\mathrm{id}\rangle$, 此时 $(0,0)$ 是一个奇点, 需爆破消去. 计算转移函数后知爆破所得的流形 X 就是 $\mathbb{CP}^1$ 上的线丛 $\mathcal{O}(-2)$, 即双全纯同构于 $\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1$.
设 $\mathbb{C}^2$ 的坐标为 (z_1, z_2), 则定义 $\omega_2 + i\omega_3 = \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$. 注意等式右侧的形式可以在商空间上良好定义, 进而可以提升到 X 上. 函数 $u = |z_1|^2 + |z_2|^2$ 的良好定义性同理, 进而取 $t > 0$ 固定构作函数

$$f = \sqrt{u^2 + t^4} + t^2 \log u - t^2 \log(\sqrt{u^2 + t^4} + t^2),$$

以此作为 Kähler 势得 $\omega_1 = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} f$.
繁杂但不困难的计算指出 X 是**渐近平坦**的, 其上的度量 g 和诸 ω_i 与平坦 $t = 0$ 时渐近相差 $O(t^4 u^{-2})$, 这将用于未来的估计.

Eguchi-Hanson 空间 (图)



推广的 Kummer 构造

考虑 T^7 上的三个作用

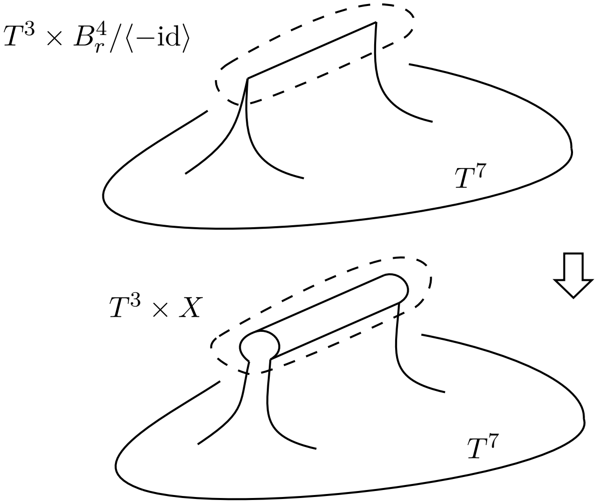
$$\alpha((x_1,\cdots,x_7)) = (-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,x_5,x_6,x_7),$$
$$\beta((x_1,\cdots,x_7)) = (-x_1,\frac{1}{2}-x_2,x_3,x_4,-x_5,-x_6,x_7),$$
$$\gamma((x_1,\cdots,x_7)) = (\frac{1}{2}-x_1,x_2,\frac{1}{2}-x_3,x_4,-x_5,x_6,-x_7).$$

可以证明 $\Gamma := \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ 且

命题 3.1

商 T^7/Γ 的奇点集 S 为不交的 12 份 T^3; 存在一 S 的开邻域 U, 使得其 12 个连通分支均**等距同构于** $T^3 \times (B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle)$, 其中 r 为一固定正实数.

流形 M 的构造 (图)



流形 M 的构造

流形 M 的构造需要把 $B_r^4/\langle -\mathrm{id}\rangle$ 换成一个四维流形 X. 这里仿照前文 Eguchi-Hanson 空间的构造, 引入截断函数 $\eta:[0,r^2]\to[0,1]$ 后定义

$$f_t=\sqrt{u^2+\eta(u)^2t^4}+\eta(u)t^2\log u-\eta(u)t^2\log(\sqrt{u^2+\eta(u)^2t^4}+\eta(u)t^2)$$

来代替前文中的 f. 注意在 $\eta'=0$ 的地方 $\omega_1(t)$ 与 t 无关.
则流形 M 便是把 T^7/Γ 中奇点的邻域换成 $T^3\times X$, 其上的 G_2-结构定义为 $\varphi_t=\omega_1(t)\wedge y_5+\omega_2\wedge y_6+\omega_3\wedge y_7+y_5\wedge y_6\wedge y_7$. 在粘接 $T^3\times X$ 之外的部分, 使用 T^7 上平坦的 G_2-结构.
可以证明 M 是连通, 单连通且紧致的. 由定义可见此处 $\mathrm{d}\varphi_t=0$, 因而 G_2-Holonomy 的**主要障碍在于 $\mathrm{d}\Theta(\varphi_t)$ 与 0 的差距**.
定义 $\nu_t=\omega_1(t)\wedge y_6\wedge y_7+\omega_2\wedge y_7\wedge y_5+\omega_3\wedge y_5\wedge y_6+\frac{1}{2}\omega_1(t)\wedge\omega_1(t)$.
易见这是闭形式; 由 Eguchi-Hanson 空间渐近平坦的性质, 若定义误差项 $*_{\varphi_t}\psi_t:=\Theta(\varphi_t)-\nu_t$ 则 $\|\psi_t\|_{L^2}\le D_1t^4$ 和 $\|\psi_t\|_{C^2}\le D_1t^4$.

两个主定理

定理 3.2

令 M 为 7 维流形, 闭的 G_2-结构 φ 实现为 Λ^3_+ 的截面. 设 M 上存在 3-形式 ψ 有 $\mathrm{d}^*\psi = \mathrm{d}^*\varphi$, 且存在 $E_1, \cdots, E_5$ 为些许正常数使以下成立:

(i) 范数的估计 $\|\psi\|_{L^2} \leq E_1 t^4$ 且 $\|\psi\|_{C^{1,1/2}} \leq E_1 t^4$;

(ii) 任取截面 $\xi \in C^{1,1/2}(\Lambda^3 \mathrm{T}^* M)$ 且 ξ 闭, 则
$\|\xi\|_{C^0} \leq E_2(t\|\nabla\xi\|_{C^0} + t^{-7/2}\|\xi\|_{L^2})$ 且
$\|\nabla\xi\|_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\xi]_{1/2} \leq E_3(\|\mathrm{d}^*\xi\|_{C^0} + t^{1/2}[\mathrm{d}^*\xi]_{1/2} + t^{-9/2}\|\xi\|_{L^2})$;

(iii) 体积有下界 $1 \leq E_4 \mathrm{vol}(M)$;

(iv) 若光滑实函数 f 在 M 上的积分为 0, 则 $\|f\|_{L^2} \leq E_5\|\mathrm{d}f\|_{L^2}$.

则存在 κ, K 两正常数仅取决于诸 E_i, 使 $0 < t \leq \kappa$ 时, 存在光滑 2-形式 $\eta \in C^\infty(\Lambda^2 \mathrm{T}^* M)$ 辅以 $\|\mathrm{d}\eta\|_{C^0} \leq K t^{1/2}$ 满足 $\varphi + \mathrm{d}\eta$ 是无挠 G_2-结构.

该定理从流形上不等式的信息得到待证结论.

两个主定理

定理 3.3

与定理3.2有一致的初始设定，且存在 $D_1, \cdots, D_5$ 为些许正常数使以下成立:

(i) 范数的估计 $\|\psi\|_{L^2} \le E_1 t^4$ 且 $\|\psi\|_{C^{1,1/2}} \le E_1 t^4$;
(ii) 内射半径 $\delta(g)$ 满足 $\delta(g) \ge D_2 t$;
(iii) Riemann 曲率 $R(g)$ 有 $\|R(g)\|_{C^0} \le D_3 t^{-2}$;
(iv) 体积有下界 $\mathrm{vol}(M) \ge D_4$;
(v) 直径有上界 $\mathrm{diam}(M) \le D_5$.

则存在诸 E_i 使得定理3.2的条件 (i)-(iv) 成立.

该定理从流形本身的信息得到其上不等式的信息.

可以验证所构造的流形 M 满足定理3.3的条件.

定理3.3的证明简介

定理3.2条件中不平凡的是三条不等式, 总体来说, 这些不等式要么是局部的不等式要么是一些熟知的结果.

不等式 $\|\xi\|_{C^0} \leq E_2(t\|\nabla\xi\|_{C^0} + t^{-7/2}\|\xi\|_{L^2})$ 主要来自**单位球上的不等式** $\sup_{B_1^7}|f| \leq \inf_{B_1^7}|f| + 2\|\nabla f\|_{C^0}$, 再用 L^2-范数控制 inf 并代入 $f = |\xi|$, 最后用共形变换 $g \mapsto t^{-2}g$ 即可.

对 $\|\nabla\xi\|_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\xi]_{1/2} \leq E_3(\|\mathrm{d}^*\xi\|_{C^0} + t^{1/2}[\mathrm{d}^*\xi]_{1/2} + t^{-9/2}\|\xi\|_{L^2})$, 可以先研究**一阶椭圆方程** $(\mathrm{d}+\mathrm{d}^*)\xi = \mathrm{d}\xi$, 利用**内估计和 Schauder 估计**得到 $\|\nabla\xi|_{B_{1/2}^7}\|_{C^0} + [\nabla\xi|_{B_{1/2}^7}]_{1/2} \leq F_3(\|\mathrm{d}^*\xi\|_{C^0} + [\mathrm{d}^*\xi]_{1/2} + \|\xi\|_{C^0})$, 同样用共性变换后配合上一条不等式消去 C^0-范数即可.

对「若光滑实函数 f 在 M 上的积分为 0, 则 $\|f\|_{L^2} \leq E_5\|\mathrm{d}f\|_{L^2}$」一条, 需要使用**无边 Riemann 流形上 Laplace 算子最小正特征值的下界估计**, 然后使用分部积分即可.

定理3.2的证明简介

先给出一条引理:

引理 3.4

设 M 为七维流形与其上的闭 G_2-结构 φ. 存在正常数 e_1 使得对任意截面 $\chi \in C^0(\Lambda^3\mathrm{T}^*M)$ 且 $\|\chi\|_{C^0} \leq e_1$, 有 $\varphi+\chi$ 仍落入 $C^0(\Lambda^3\mathrm{T}^*M)$ 且 $\Theta(\varphi+\chi)$ 的一阶展开如下

$$\Theta(\varphi+\chi) = *\varphi + \frac{4}{3} * \pi_1(\chi) + *\pi_7(\chi) - *\pi_{27}(\chi) - F(\chi),$$

其中 F 是定义在 $\Lambda^3\mathrm{T}^*M$ 上一个半径为 e_1 的闭球到 $\Lambda^4\mathrm{T}^*M$ 的光滑函数, 额外要求 $F(0)=0$; 其中的 $*$-算子是由 φ 所诱导的.

这个引理指出所研究的非线性方程 $\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)=0$ 的**线性化是双曲的**而非椭圆的, 构成了方程处理的主要困难. 这个引理的证明使用了前面提到的 G_2 的表示论与 Schur 引理.

定理3.2的证明简介

证明核心在于引入变数 ϵ 从而将原方程转化为如下一系列方程:

$$\mathrm{d}^*\eta=0,\epsilon=\frac{1}{3\mathrm{vol}(M)}\int_M \mathrm{d}\eta\wedge *\psi,\mathrm{d}^*\mathrm{d}\eta=(1+\epsilon)\mathrm{d}^*\psi+*\mathrm{d}F(\mathrm{d}\eta).$$

可见方程现在**转化为椭圆方程**, 这一方程可以使用迭代方法求解, 并且椭圆性可以保证迭代中不会损失正则性以及可以使用 Schauder 估计来保证收敛. 最终证明存在光滑的 2-形式 η 和 ϵ 满足以上诸方程.

以上方程等价于 $\mathrm{d}\Theta(\varphi+\mathrm{d}\eta)=\frac{7}{3}\mathrm{d}(*\pi_1(\mathrm{d}\eta))+2\mathrm{d}(*\pi_7(\mathrm{d}\eta))-\epsilon\mathrm{d}*\varphi$, 需证明所得的 η 和 ϵ 能使得等式右边为 0. 这里主要利用了证明中迭代所用的对 η 的估计, 以及定理3.2条件中的 Poincaré 不等式.

定理3.2的证明简介

证明核心在于引入变数 ϵ 从而将原方程转化为如下一系列方程:

$$d^*\eta = 0, \epsilon = \frac{1}{3\mathrm{vol}(M)} \int_M d\eta \wedge *\psi, d^*d\eta = (1+\epsilon)d^*\psi + *dF(d\eta).$$

可见方程现在**转化为椭圆方程**, 这一方程可以使用迭代方法求解, 并且椭圆性可以保证迭代中不会损失正则性以及可以使用 Schauder 估计来保证收敛. 最终证明存在光滑的 2-形式 η 和 ϵ 满足以上诸方程.
以上方程等价于 $d\Theta(\varphi + d\eta) = \frac{7}{3}d(*\pi_1(d\eta)) + 2d(*\pi_7(d\eta)) - \epsilon d * \varphi$, 需证明所得的 η 和 ϵ 能使得等式右边为 0. 这里主要利用了证明中迭代所用的对 η 的估计, 以及定理3.2条件中的 Poincaré 不等式.

结语

感谢各位老师的耐心聆听!