TD-3

陈子安

20××.××.××

Chapitre 4,5 基本没有大问题, 唯一计算上的一个小便利已经发在群里了, 同学们可以直接参考 (但是不保证考试能直接用)

我们这次来尝试直接定义电磁场的 Lagrange 密度 $\mathcal{L}$, 至于场和粒子互相作用的部分, 我相信已经在理论力学课上学习过了. 我们将选择一种特别的方式去构造 Lagrange 密度, 在风格上比较类似 Yang-Mills 理论.

我们仍然选取原先的设定, 设底流形 X 是**四维**时空流形, 我们在这里甚至可以不关心流形结构, 即视为 $X=\mathbb{R}^4$ 即可. 接下来我们要把电场和磁场想办法变成我们之前说的<u>截面</u>, 至于是什么向量丛的截面呢? 我们将使用 n-形式的截面 $\Gamma(\Lambda^n \mathrm{T}^* X) =: \Omega^n(X)$.

一般而言我们把电场视为 1-形式, 即 $E = E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z$. 而磁场视为 2-形式, 这是因为 Biot-Savart 定律中出现了叉乘, 对应到外形式即出现了 $\wedge$, 即 2-形式 $B = B_x \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

下面再简要复习一下 de Rham 算子/外微分算子的作用, 在三维空间中的情况, 展列如下:(用 d' 来与 X 上的 de Rham 的算子区分)

- $\mathrm{d}' : \Omega^0 \to \Omega^1$, 效果形同梯度
- $\mathrm{d}' : \Omega^1 \to \Omega^2$, 效果形同旋度
- $\mathrm{d}' : \Omega^2 \to \Omega^3$, 效果形同散度

所以,$\mathrm{div}\vec{B}=0$ 和 $\mathrm{curl}\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0$(省去光速) 应该被写为形如 $\mathrm{d}'B=0$ 和 $\mathrm{d}'E+\partial_t B=0$, 这里的项应该与对时间的求导有关. 现在我们引入传说中的电磁张量 (2-形式)$F=B+E\wedge\mathrm{d}t$, 并且我们直接声称 $\mathrm{d}F=0$, 下面就对此演算一下:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= \mathrm{d}B + \mathrm{d}E\wedge\mathrm{d}t = \mathrm{d}'B + \mathrm{d}t\wedge\partial_t B + (\mathrm{d}'E + \mathrm{d}t\wedge\partial_t E)\wedge\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}'B + (\partial_t B + \mathrm{d}'E)\wedge\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

下面我们需要定义一下所谓的度规. 一般而言, 物理学中说的度规是逐点定义的切空间上的二次型, 不要求正定性, 甚至有时候不要求非退化性. 我们上课用的是典中典之 [**i**]ct, 那么对应的二次型可以写为 $g = -\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + g'$, 其中 g' 是三维欧氏空间对应的标准的度规. 由此我们可以定义 X 上标准的体积形式 $\mathrm{vol} = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, 这里我们省去了全部的光速. 进而,Hodge 算子呼之欲出.

我们定义所谓的 Hodge 算子, 我们写成一般有度规 g 的定向流形 M, 定义 $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$, 且对一个固定的 μ, 其像 $*\mu$, 对任意的 $\omega \in \Omega^p(M)$, 满足有 $\omega \wedge *\mu = g(\omega, \mu)\mathrm{vol}$, 其中 g 可以自然诱导上去. 当然也可以对应定义欧氏空间的部分, 记为 $*'$. 以上工具齐备之后, 我们可以整理 Maxwell 方程的余下两条了.

我们仍然省去所有光速, 有 $\mathrm{div}\vec{E} = \rho$ 和 $\mathrm{curl}\vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j}$. 今有了 Hodge 算子, 可以先用欧氏空间的部分, 写为 $*'\mathrm{d}' *' E = \rho$ 和 $-\partial_t E + *'\mathrm{d}' *' B = j$. 这启示我们考虑形如 $*\mathrm{d} * F$, 马上给出计算:

$$
\begin{aligned}
*\mathrm{d} * F &= *\,\mathrm{d}(*'E - *'B \wedge \mathrm{d}t) \\
&= *(*'\partial_t E \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}' *' E - \mathrm{d}' *' B \wedge \mathrm{d}t) \\
&= -\partial_t E - *'\mathrm{d}' *' E \wedge \mathrm{d}t + *'\mathrm{d}' *' B \\
&= j - \rho \mathrm{d}t =: J.
\end{aligned}
$$

由此我们得到了新的 Maxwell 方程组, 即 $\mathrm{d}F = 0$ 和 $*\mathrm{d} * F = J$.

实际上这和我们在课上定义的电磁张量完全一致, 只需要我们写出

$$
F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu,
$$

此时数学形式上的直觉立刻告诉你形式的反对称性对应了电磁张量作为 4×4 方阵的反对称性. 下面还可以从矢势的角度去理解, 不必要但有益地, 我们给予矢势新的称呼, 唤作联络, 即为

$$
A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu.
$$

而电磁张量此时便唤作曲率, 作为一般的向量丛上的曲率, 我们需要 Cartan

公式来完成我们希望的具体计算, 为

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{d}A + A \wedge A = \mathrm{d}A \\ &= \mathrm{d}(A_\mu \mathrm{d}x^\mu) \\ &= \partial_\nu A_\mu \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = \partial_\mu A_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu. \end{aligned}$$

可见与课上的结果完全一致!(除了我们省去了所有光速.) 实际上以上所有的操作本质上和课上的操作都一致, 但是课上相当于在局部坐标中做了大部分工作, 本 **TD** 则为大家提供了一种用流形语言操作的方法, 能更好看清电动力学的几何结构. 至于 Lorentz 协变性, 在这里不过就是<u>与局部坐标选取无关</u>的另一种表述罢了.

值得一书之处在于为什么 Cartan 公式中有一个 $A \wedge A$, 这不是无意义的, 此处的一个原因在于 A_μ 是一些一般的数, 交换性良好. 一般而言,A_μ 可能是一些矩阵, 比如在弱相互作用力的情况下, 有 $A_\mu \in \mathfrak{su}(2)$, 那么 $A \in \Gamma(\mathfrak{su}(2) \otimes \mathrm{T}^*X)$, 则 $A \wedge A = 1/2[A_\mu, A_\nu]\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$, 其中 $[\cdot, \cdot]$ 为 $\mathfrak{su}(2)$ 上的 Lie 括号. 这是 Yang-Mills 理论真正强力的地方, 可以把许多更为复杂的作用力统一到几何的框架下, 而少数的代价不过诸如丧失交换性, 但是又引入了 Lie 群和 Lie 代数, 使得结构反倒更为丰富了.

一切准备齐备, 我们请出我们的无源电磁场 Lagrange 密度,(有源的话可以类似 **TD-1** 的那样, 直接增加与源的作用项,) 展列为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F \wedge *F) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\mathrm{vol},$$

其中第二个等号后位于局部坐标之中. 于是, 作用量也可以直接写出来, 是为

$$S = \frac{1}{2}\int_X \mathrm{tr}(F \wedge *F).$$

这样写的唯一目的就是使之直接变分得到我们新的 Maxwell 方程, 我们来计算验证之. 最原初的设定是矢势发生了微小的变换, 即 $A \to A + \delta A$, 则首

先计算得 $\delta F = \mathrm{d}\delta A$, 进而

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2}\int_X \delta F \wedge *F + F \wedge *\delta F \\ (\text{Hodge 算子定义}) &= \int_X \delta F \wedge *F \\ &= \int_X \mathrm{d}\delta A \wedge *F \\ (\text{Stokes 公式}) &= \int_X \delta A \wedge \mathrm{d} * F,\end{aligned}$$

最后利用 δA 的任意性立得结果.

我们愿意来闲扯一些特殊的状况, 即所谓的自对偶/反自对偶, 意为 $*F = \pm F$, 这实际上已经对底流形 X 的拓扑给出了非常强的限制. 此时,Lagrange 密度就变成 $\mathcal{L} = \pm 1/2\mathrm{tr}(F \wedge F)$ 了, 而我们会把 $\mathrm{tr}(F \wedge F)$(的上同调类) 唤作第二 Chern 类, 满足自对偶/反自对偶的 F 对应的 A 会被称为瞬子. 但我们会发现只要自对偶/反自对偶就天然满足 Maxwell 方程, 这意味着对应的作用量 S 作为瞬子 A 的函数竟应该是常数, 或者叫, 不变量! 我们唤之为第二 Chern 数(差系数).

最后之最后, 一个有趣的问题是当底流形是二维空间加上时间 (2+1 维) 的时候, 以上的理论全部失效, 我们应该如何构造 Lagrange 密度? 在此简要介绍所谓的Chern-Simons 形式 为

$$\mathcal{L} = \mathrm{tr}(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A),$$

对应的作用量称为Chern-Simons 作用量. 但是有一个问题, 这个东西不是完全在 Lorentz 变换下不变的, 甚至不一定是在同一个上同调类中,(换言之作用量也会变,) 需要考虑同伦类, 更多的话题已经完全超出了预期, 暂止于此. 至于为什么要关心二维? 一方面很多三维的问题最后可以简化到二维, 作为某种边界上的理论或者把理论投影下去, 需要的时候通过流形配边等手段升回三维; 另一方面, 二维有自己深刻的结构所在, 比如 Jordan 曲线定理等纯数学的定理会导致深刻的物理结果, 因而为物理学家关心.

这些无关紧要的介绍, 当个乐子读读就行.