TD-1

陈子安

20××.××.××

Summary

电动力学这门课的目的便是学习如何 (以动力学的方式) 去处理 (经典的) 场, 以及把这样的方法具体应用于电磁场的研究中.

这一主旨带来的影响是看起来可能这门课的知识点很分散, 一会儿去级数法解方程一会儿又做一些不知来头的近似. 下面就简单梳理一下课程的主干思路, 也许会有所帮助:

- 第一部分介绍了电磁学的基本实验现象, 并总结出 Maxwell 方程组. 注意我们在后续的课程中实际上应该认为 Maxwell 方程组是根本的, 是无条件的物理前提, 一切的理论都从这里出发. 同时老师还在这里顺便介绍了一些基本的数学工具, 尤其是 Einstein 求和约定, 希望大家能够一定程度上熟悉一些, 如果未来做数学碰到和微分几何与 PDE 相关的东西很难避免用到.

- 二三章应当被认为是整体, 考虑了无时间演化的场的性质; 这是必要的, 因为时间和空间是不等价的. 在这里, 课本上给出了几种想法. 首先因为严格精确求解一个场是困难的, 从而我们希望可以把场的主导部分先行求解, 这便是场的多极展开 (某种意义上级数方法也有类似的效果); 另一方面是复杂的边条件会带给我们求解上的麻烦, 所以需要用到 Green 函数法 (电像法). 为了方便磁-电类比, 还会引入磁荷的概念, 此时我们理解为是一种工具就行了, 更深刻的话题日后再谈.

- 四五章将研究随时间会演化的场, 这里最特殊的便是电磁波. 这是一种独有的现象, 因此我们有必要进行充分的研究, 研究其传播 (包括反射与折射, 包括在特定的边条件下) 和激发 (天线是如何工作的).

- 六七章背后的问题更为深刻, 即是何种时空观下允许我们对 Maxwell 方程组进行参考系变换. 要注意, 参考系变换带来的效应是十分复杂的, 一个简单的问题是一个运动的电子如何激发电磁场? 这可不是直接 Coulomb 定律就能得到的. 其背后的整套时空观称为狭义相对论,Maxwell 方程组需要在这套时空上才能协变.

- 八九章便是袭承上面的观念, 开始研究场和粒子之间的相互作用. 注意由于粒子此时必然是运动的, 相对论是不可避免的. 在一些基本理论的分析之后就会给出一些应用和展望, 比如解释导体的一些性质, 比如研究带电粒子自己给自己的阻尼力.

最后还想提一句, 书上这些内容只能说是基础的内容; 物理学家对 (经典) 场的研究是十分丰富的, 比如我们可以用 Lagrange 和 Hamilton 力学的方式去描述, 我们也可以用更抽象的 Yang-Mills 规范理论去描述, 各种方式的背后都蕴藏着别样丰富的物理和数学.

Introduction

我们在理论力学的课程中学习过了粒子和刚体的 Langrange 力学, 这些东西的一大特点在于自由度不多: 比如单粒子只有 3 个自由度, 而刚体是 6 个自由度. 但实际上, 世界上不存在这般理想的存在; 真实的存在, 更为复杂 (会发生形变), 自由度也不一定有限. 也因此, 我们需要构造场的 Lagrange 力学.

Review of the single particle

我们对单粒子情形进行有益的整理和复习.

暂时不考虑其他参数对系统的影响. 那么在给定初值后, 系统的演化实际上就只是时间的函数. 我们用一个实数 t 足以参数化时间, 换言之, 演化的所有参数只在一根实直线上取值, 我们把这根实直线专取一个名字, 叫时间轴 X.

我们的终极目标是求解 $\vec{r} = \vec{r}(t)$, 其中粒子的位置应当是三维空间中的一个向量, 取一组基时写为 (x_1, x_2, x_3). 换言之, 我们实际上是在每一个 $t \in X$ 上, 放一个三维空间 V, 这样的结构在数学上称为向量丛. 此处, 我们把 X 每个点上摆好 V 的整体记为 M. 则所谓真实的运动实际上是 $X \to M$ 的一个光滑映射, 使得 $t \mapsto (t, \vec{r})$, 数学上我们称之为截面, 记全体截面的集合是$\Gamma(M)$. 能解出截面等于求解了整个系统之演化.

下一步的工作是解释 Lagrange 量. 为了刻画真实的世界, 我们还需要引入位置的导数信息. 此处, 位置只有对时间求导, 一阶导我们称为速

度, 二阶导称为加速度, 如此类推. 由 Ostrogradsky 定理, 为了不出现能量向下发散的现象, 我们一般只能 (本质地) 包含到一阶导信息, 也即 $L = L(t, x_i, \partial_t x_i)$. 由此可见, 拉氏量其实是在一个比 M 更大的结构上取值, 我们只记之为$\underline{J_1(M)}$, 数学上称为$\underline{M\text{ 的一阶射流丛}}$. 而在数学上,$\Gamma(M) \hookrightarrow \Gamma(J_1(M))$ 有一个自然的嵌入, 即 $\Gamma(M)$ 中的元素都可以逐点计算导数, 从而最终变成 $\Gamma(J_1(M))$ 的元素; 也可以物理地说, 对于任何一个可能真实发生的演化, 即 $\Gamma(M)$ 中的元素, 可以逐时间点计算速度, 并最终代入 L 中使之变成一个只是时间的函数. 当然反过来, 不是任何 $\Gamma(J_1(M))$ 中的元素都是可以真实发生的.

然后我们定义作用量的概念, 写为

$$S = \int_X L\mathrm{d}t,$$

这个宇宙运行的规律叫做 Hamilton 原理, 数学地表示为

$$\delta S = 0,$$

通过一阵纯数学的计算, 且假设 L 具有足够好的光滑性, 我们得到了在上半学期课程中用最多的 Euler-Lagrange 方程

$$[\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial(\partial_t x_i)}]L = 0.$$

Let us enter the world of the field

我们首先意识到, 场的演化并不只依赖于时间. 比如电磁波的激发和传播, 不仅时间上需要考虑演化, 空间上也有变化! 这就意味着我们实际上考虑的参数空间应该是<u>四维时空</u>, 我们此处仍然记为 X, 固定一种坐标选取, 直接记为 x_μ.

下一个重要的问题在于你希望求解何样的场? 对于最一般的情况, 仍然是每个 X 的点上摆一个线性空间 V. 我们记为分量为 ϕ_a, 其中 a 是一个指标, 跑遍 V 的维数. 而 M 等所有概念都可以类似定义, 我们最终的工作仍然是求解截面.

Example. 对于电磁场, 我们需要求解矢势和标势, 即 $(A^1, A^2, A^3, \phi) = A^\mu$, 从而 V 是四维空间. 当然, 我们没有天然的要求限定 V 必须是实空间, 经常地, 我们可以令 V 为复数域, 几何量子化就是从这里开始的.

写出 Lagrange 量是必不可少的工作. 而此处, 由于 X 的维数不再是一维的, 迫使我们需要引入事实上的偏导数,(前面写 ∂_t 只是形式记号, 实际上

就是一般的单变量求导,) 即 $L = L(x_\mu, \phi_a, \partial_\mu \phi_a)$. 下一步便是写出作用量,为

$$S = \int_X L \mathrm{d}^4 x;$$

其中 $\mathrm{d}^4 x$ 为 X 上的体积元. 特别注意,$\mathrm{d}^4 x$ 的形式和坐标 x_μ 的选取有关;这个问题在 X 只是时间轴的时候并不明显, 但是一旦在复杂的结构上积分时, 尤其是此处,X 是四维流形的情况. 数学上, 我们把一个流形上的体积元称为体积形式.

由这个宇宙运行的规律,Hamilton 原理, 经过变分法的运算, 得到 Euler-Lagrange 方程为

$$[\partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} - \frac{\partial}{\partial \phi_a}]L = 0.$$

Exercise. 请验证这一计算.

由于场和粒子的不同, 有时我们把场的 Lagrange 量又称为 Lagrange 密度, 并改记为 $\mathcal{L}$; 但是请记住, 实际上框架是一模一样的, 不必纠结于密度这一词, 并无更多含义.

Example. 我们给出一种最简单的场, 称为自由标量场,Lagrange 密度书写为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2,$$

套用 Euler-Lagrange 方程立得

$$(\partial_\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0,$$

此即著名的 Klein-Gordon 方程.

Where is the source?

在物理学实际上, 我们希望我们可以一定程度上控制场的演化, 但是如果只看上文, 似乎我们只能操作初条件来调整. 这样的事情必然不是人们期望的, 一般人们可以通过在空间中增加一些源, 这样我们可以手工制造一些我们需要的场, 或者说, 场的演化需要和我们的源相互作用. 一般的源是时间和空间的函数, 我们记为 $J(x_\mu)$, 在 $\mathcal{L}$ 中以某种形式引入即可.

Example. 对自由标量场考虑如下新的 Lagrange 密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + J\phi,$$

重新由变分运算得

$$(\partial_\mu \partial_\mu + m^2)\phi = J.$$

对于源是粒子的情形, 只需要引入 Dirac-δ 函数即可.