# 四维黎曼几何中的自对偶

陈子安，张乐，朱海鑫

USTC

May 4, 2022

# 目录

# 摘要

我们通过学习Atiyah, Hitchin与Singer合作发表的著名论文《四维黎曼几何中自对偶》掌握了一些几何学与微分方程的基本知识。我们在这个报告中列举了其中的一部分重要内容。同时，我们理解了这篇论文中的部分重要结果，并将学习笔记摘录下来。其中包括：1. 黎曼曲率的分解与自对偶条件的几何性质；2. 可积性定理在向量丛几何中的应用；3. 四维自对偶联络的模空间局部结构。

# 记号

- $V_+, V_-$ 为Spin流形上的旋子丛。
- $\mathcal{A}^*(M, E)$ 为向量丛 $E$ 值的微分形式。
- $F_\omega, \Omega$ 均表示曲率，分别表示主丛上曲率和表示向量丛的曲率。
- $D_1$ 表示向量丛联络诱导的丛值1-形式丛到2-形式丛的共变导数。
- $Ad_E$ 表示主丛 $E$ 的伴随丛，即配丛 $Ad_E = E \times_G \mathfrak{g}$

# 曲率张量的分解

对于黎曼流形的黎曼曲率张量，有如下分解

**定理 (曲率张量的分解)**

$$R = W + \frac{1}{m-2} E \owedge g + \frac{S}{2m(m-1)} g \owedge g \tag{1}$$

三个部分互相正交，分别称为*Weyl*张量部分，无迹*Ricci*张量部分，数量曲率部分。

其中Weyl张量有很好的几何性质。

**Proposition**

*Weyl*张量是共形不变的。

# 曲率张量的分解

对于黎曼流形的黎曼曲率张量，有如下分解

**定理 (曲率张量的分解)**

$$R = W + \frac{1}{m-2} E \owedge g + \frac{S}{2m(m-1)} g \owedge g \quad (1)$$

三个部分互相正交，分别称为*Weyl*张量部分，无迹*Ricci*张量部分，数量曲率部分。

其中Weyl张量有很好的几何性质。

**Proposition**

*Weyl*张量是共形不变的。

# 自对偶四维流形

固定维数为4，$M$ 上有自然的Hodge-Star算子 $*: \Lambda^2 T^* M \to \Lambda^2 T^* M$平方为恒等所以可以直和分解为 $\Lambda^2 T^* M = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$,由于 $R \in \Gamma(S^2(\Lambda^2 T^* M))$ ,可以视为 $\mathcal{R}: \Lambda^2 T^* M \to \Lambda^2 T^* M$的丛同态。而2阶微分形式丛上由Hodge-Star得出的直和分解把该映射分解为4个分量，由于曲率张量分解的每个分量都是曲率型张量，于是也可化为这样的映射。其中交换分量的映射是无迹Ricci项，映射的迹是由数量曲率项提供的，剩下的是Weyl张量写为如下形式的分解。

$$W = W_+ + W_- \in \Gamma(End(\Lambda^2_+)) \oplus \Gamma(End(\Lambda^2_-)) \quad (2)$$

分别称为Weyl张量的自对偶部分和反自对偶部分。

**Definition**

*4维黎曼流形 $M$ 称为自对偶的，如果 $W_- = 0$，即Weyl张量是自对偶的。*

# 自对偶四维流形

固定维数为4，$M$ 上有自然的Hodge-Star算子 $*: \Lambda^2 T^*M \to \Lambda^2 T^*M$平方为恒等所以可以直和分解为 $\Lambda^2 T^*M = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$,由于 $R \in \Gamma(S^2(\Lambda^2 T^*M))$ ,可以视为 $\mathcal{R}: \Lambda^2 T^*M \to \Lambda^2 T^*M$的丛同态。而2阶微分形式丛上由Hodge-Star得出的直和分解把该映射分解为4个分量，由于曲率张量分解的每个分量都是曲率型张量，于是也可化为这样的映射。其中交换分量的映射是无迹Ricci项，映射的迹是由数量曲率项提供的，剩下的是Weyl张量写为如下形式的分解。

$$W = W_+ + W_- \in \Gamma(End(\Lambda^2_+)) \oplus \Gamma(End(\Lambda^2_-)) \tag{2}$$

分别称为Weyl张量的自对偶部分和反自对偶部分。

**Definition**

*4维黎曼流形 $M$ 称为自对偶的，如果 $W_- = 0$，即Weyl张量是自对偶的。*

# 自对偶向量丛

设$\omega$为$G-$主丛$E$上一联络，曲率$F_\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \in \mathcal{A}^2(E,\mathfrak{g})$，曲率可以视为$\mathcal{A}^2(M, Ad_E)$中元素。我们立刻有Hodge$*$算子，并应用到此曲率形式上. 取$M$为四维Riemann流形，则有直和分解

$$\mathcal{A}^2(M, Ad_E) = \mathcal{A}^2_+(M, Ad_E) \oplus \mathcal{A}^2_-(M, Ad_E) \tag{3}$$

$\mathcal{A}^2_\pm(M, Ad_E)$分别为$* = \pm 1$的特征空间.

**Definition**

我们称一个联络$\omega \in \mathcal{A}^1(E,\mathfrak{g})$是自对偶的，若$F_\omega \in \mathcal{A}^2_+(M, Ad_E)$有

$$*F_\omega = F_\omega \tag{4}$$

设$\omega$为$G-$主丛$E$上一联络，曲率$F_\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \in \mathcal{A}^2(E,\mathfrak{g})$，曲率可以视为$\mathcal{A}^2(M, Ad_E)$中元素。我们立刻有Hodge$*$算子，并应用到此曲率形式上. 取$M$为四维Riemann流形，则有直和分解

$$\mathcal{A}^2(M, Ad_E) = \mathcal{A}^2_+(M, Ad_E) \oplus \mathcal{A}^2_-(M, Ad_E) \tag{3}$$

$\mathcal{A}^2_\pm(M, Ad_E)$分别为$* = \pm 1$的特征空间.

**Definition**

我们称一个联络$\omega \in \mathcal{A}^1(E,\mathfrak{g})$是自对偶的，若$F_\omega \in \mathcal{A}^2_+(M, Ad_E)$有

$$*F_\omega = F_\omega \tag{4}$$

# 自对偶的拓扑限制

在该论文中，对自对偶流形的拓扑有研究如下。

**Proposition**

*自对偶流形的符号差(Pontrjagin数)是非负的。*
*自对偶向量丛的Pontrjagin数是非负的。*

证明只需要利用Pontrjagin类的Chern-Weil理论计算为曲率平方的迹，反自对偶部分为0可知最后只剩自对偶部分的平方项，所以非0.

# 重要定义

设$E$是一个向量丛,此处视为实向量丛.一个$E$的截面$s$通过对偶变成$s^\vee$,视为对偶丛$E^*$上的连续函数,定义为$s^\vee(\epsilon_x) = \epsilon_x(s(x))$.为了方便,我们给出局部的参数化.设$E$的局部标架场$(e_1, ..., e_n)$及其对偶基$(\epsilon_1, ...\epsilon_n)$,换言之,$E^*$的局部标架场,则我们可以参数化之形如

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n, x) \mapsto \sum_i \lambda_i \epsilon_i(x) \in E^*$$

若截面$s$局部上可以写为$s = \sum_i f_i e_i$,则有

$$s^\vee(\lambda_1, ..., \lambda_n, x) = \sum \lambda_i f_i(x),$$

以及$\mathrm{d}s^\vee = \sum \mathrm{d}\lambda_i f_i + \sum \lambda_i \mathrm{d}f_i$.

# 重要定义

下面我们来定义接下来主要的研究对象$V(\overline{\mathrm{D}})$,这将是$T^*E^*$的一个子丛。为了把$X$上的丛变成$E^*$上的丛,我们利用投影映照$p: E^* \to X$,使用拉回得到$E^*$上的丛.我们寻求向量丛之间的同态$V: p^*E \otimes \Lambda^1 \to T^*E^*$.我们可以把这个映射具体写为

$$V((e_x \otimes \alpha_x)_{\epsilon_x}) = -\epsilon_x(e_x)p^*\alpha_x \in (T^*E^*)_{\epsilon_x}.$$

而我们的一阶微分算子$\overline{\mathrm{D}}$主项实际上就是 $\sigma: E \otimes \Lambda^1 \to F$ 的丛同态,我们把其核记作$S_1 = R$,则所谓的$V(\overline{\mathrm{D}})$就定义为$V(p^*R)$.而 $S_2 \subset E \otimes \Lambda^2$ 是 $S_1 \otimes \Lambda^1$ 在外积下张成的,即其中是形如 $\sum s_i \wedge \alpha_i$ 的元素.

# 可积性定理

论文中的主要可积性定理如下。

**Proposition (Atiyah-Hitchen-Singer,1978)**

$V(\overline{\mathrm{D}}) \subset T^*(E^*\backslash 0)$是可积的,当且仅当如下两条成立

- $\mathrm{D}_1\Gamma(S_1) \subset \Gamma(S_2)$;
- $\Omega\Gamma(E) \subset \Gamma(S_2)$.

该定理给出流形向量丛对偶丛的全空间(挖去0截面)的一个由微分算子无穷小解给出的分布是否可积的简便判断。

# 可积性定理的应用

下面应用前面给出的可积性定理来解决一个具体问题。

**定理 (Atiyah-Hitchen-Singer,1978)**

设 $X$ 是定向*4*维流形。则 $X$ 上的一个共形结构自然定义出 $P(V_-)$ 的一个近复结构，该近复结构可积当且仅当 $W_- = 0$即 $X$ 是自对偶的。*(*注：*4*维*Spin*表示可以看做正交群上的射影表示，所以不用假设流形是*Spin*流形*)*

# 重要定义

$E$是一个$G-$主丛，注意到若$H \leq G$为$G$的闭子群，则$E$自然将成为一个$H-$主丛（底空间未必仍是$M$）. 记Lie群$H$的Lie代数为$\mathfrak{h}$，显见$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. 那么$E$作为$H-$主丛的联络全体$\mathcal{A}^1(E, \mathfrak{h})$作为集合包含于$\mathcal{A}^1(E, \mathfrak{g})$，且在$M$所对应的纤维上稳定.

$E$上这样的联络某种意义上并不是“本质”的，因为它可约化到有更小结构群的主丛上，称$E$上不可约化到$G$的一个真闭子群的联络为不可约的.

**Definition**

$S = \{\omega \in \mathcal{A}^1(E, \mathfrak{g}) | \omega$自对偶且不可约$\}/\sim$，其中$\sim$为两联络规范变换下相等视为一致的等价关系，即规范等价. $S$被称为$E$上不可约自对偶联络的模空间.

# 自对偶联络模空间的流形结构

论文中下面一个定理给出一般的自对偶联络模空间的结构。

**定理 (Atiyah-Hitchen-Singer,1978)**

$G$为紧半单$Lie$群，$E$为四维自对偶正数量曲率$Riemann$流形$X$上的$G-$主丛，若$S$非空，则$S$为一个微分流形，维数为

$$p_1(Ad_E) - \frac{1}{2}\dim G(\chi - \tau)$$

其中$p_1$为第一$Pontrjagin$数，$Ad_E$为$E$的伴随丛，$\chi$为$M$的$Euler$示性数，$\tau$为$M$的符号差.

# 无穷小形变

证明的核心是考虑复形

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A}^0(E,\mathfrak{g}) \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{A}^1(E,\mathfrak{g}) \arrow[r, "p_-\circ d_1"] \arrow[dr, dashed, "d_1"'] & \mathcal{A}^2_-(E,\mathfrak{g}) \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathcal{A}^2(E,\mathfrak{g}) \arrow[u, "p_-"'] & \end{tikzcd}$$

利用局部计算可得出自对偶联络模空间的切向量恰为该复形的一阶上同调群，这就证明了模空间在无穷小意义下是流形。切空间的维数只需考虑Dirac算子的指标，恰为上面复形的Euler示性数（差个符号），而通过一些消灭定理可以证明该复形的0阶，2阶同调群维数是0，于是算子指标恰为模空间维数。

# 局部结构

这里只简要提及思路。

利用Kuranishi的Banach空间的反函数定理和隐函数定理如下。

在$\mathcal{A}^1(E,\mathfrak{g})$中，一个自对偶联络可以被表述为如下方程的解

$p_-(d_1\tau+\frac{1}{2}[\tau,\tau])=0$

记$\Phi=\{\tau\in\mathcal{A}^1(E,\mathfrak{g})|\,p_-(d_1\tau+\frac{1}{2}[\tau,\tau])$且$d^*\tau=0\}$.

我们还需要如下结果以应用反函数定理。

- 任意自对偶联络与$\omega$足够近（Sobolev范数意义下），都规范等价到$\Phi$中；
- 任意一族$\omega$附近被光滑参数化的自对偶联络，都规范等价到$\Phi$中一族被光滑参数化的自对偶联络；
- $\Phi$中任意两个$\omega$附近自对偶联络之间不为规范等价.