

FONCTIONS MATRICIELLES MONOTONES ET THÉORÈMES DE LOEWNER

Projet scientifique collectif - MAT02

Coordinateur : Martin Leguil

Tuteur : Siarhei Finski

VINCENT-ADAM ALIMI - ZIAN CHEN - ABDERRAHMAN KANTOS - MATÉO PIRIO
ROSSIGNOL - MOHAMED SANGARÉ - AYOUB TIRDAD



REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier chaleureusement notre tuteur, Siarhei Finski, pour nous avoir encadrés tout au long de ce projet. Il a été attentif à nos demandes et très réactif à nos nombreuses sollicitations.

Nous exprimons également notre reconnaissance à Martin Leguil, en tant que coordinateur des PSC de mathématiques fondamentales.

Enfin, nos remerciements vont également au CMLS qui propose chaque année des sujets de PSC en mathématiques passionnants, donnant aux polytechniciens le désirant l'occasion de consacrer du temps à cette discipline.

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	4
1.1	Fonctions matricielles	4
1.2	Formulation des théorèmes	5
2	Matrices de Loewner	8
2.1	Contexte	8
2.2	Préliminaires	8
2.3	Preuve du théorème	11
2.4	Différences divisées et matrice de Loewner généralisée	15
2.5	Paires projectives	17
3	Condition nécessaire de monotonie	24
3.1	Cas des fonctions lisses	24
3.2	Régularisation	26
3.3	Cas général	28
4	Condition suffisante de monotonie	31
4.1	Caractère local	31
4.2	Preuve du sens réciproque	35
5	Deuxième théorème de Loewner	39
5.1	Représentation intégrale des fonctions de Pick	39
5.2	Preuve du deuxième théorème de Loewner	45
6	Annexe	49
6.1	théorème de Bernstein	49

1

INTRODUCTION

Il est connu que pour les fonctions réelles f de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle, on a le critère suivant de monotonie :

$$f \text{ est croissante} \iff f' \geq 0.$$

On peut définir simplement l'image par une fonction réelle d'une matrice hermitienne. En munissant l'ensemble de ces matrices d'un ordre, on peut généraliser le critère ci-dessus. C'est l'objectif des deux théorèmes dus à C. Loewner et O. Dobsch que nous présentons dans ce mémoire. On pourra se référer à [Loe1], [Loe2] et [Dob] pour les premières mentions historiques de ces théorèmes.

Dans toute la suite, n sera utilisé pour désigner un entier strictement positif quelconque et $a < b$ des éléments de $[-\infty; \infty]$ quelconques.

1.1 FONCTIONS MATRICIELLES

Commençons par définir les objets centraux qui apparaissent dans l'énoncé des théorèmes de Loewner.

Définition 1.1.1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $M^* = M$, où M^* désigne la transconjuguée \overline{M}^T de M . On note \mathbb{H}_n le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices hermitiennes de taille n .

Si de plus, pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $x^* M x$ est un réel (resp. strictement) positif, alors M est dite (resp. définie) positive. On note \mathbb{H}_n^+ (resp. \mathbb{H}_n^{++}) l'ensemble des matrices (resp. définies) positives de taille n .

On note enfin $\mathbb{H}_n(a, b)$ l'ensemble des matrices hermitiennes de taille n et de spectre contenu dans $]a; b[$.

Puisque l'on a une notion de positivité, on peut l'utiliser pour définir un ordre sur les matrices hermitiennes d'une taille fixée.

Définition 1.1.2 (Ordre de Loewner). Pour $A, B \in \mathbb{H}_n$, on note $A \leq B$ (resp. $A < B$) lorsque $B - A$ est (resp. définie) positive. Cela définit un ordre partiel sur les matrices hermitiennes de taille n . En particulier, A est (resp. définie) positive si, et seulement si, $0 \leq A$ (resp. $0 < A$).

A partir d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et M une matrice hermitienne quelconque, nous allons définir $f(M)$. Pour cela, rappelons le théorème spectral.

Théorème 1.1.3 (théorème spectral). Une matrice M de taille n est hermitienne si, et seulement si, elle peut s'écrire $M = U^* D U$ avec U unitaire de taille n et $D = \text{diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n})$ pour des réels $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. On appellera le triplet $(U, D, (\lambda_i)_i)$ une décomposition de M .

Remarque 1.1.4. Dans la formulation du théorème 1.1.3, M a pour spectre $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$.

Lorsque f est polynomiale, nous avons déjà une définition naturelle de $f(M)$. Avec la décomposition donnée par le théorème spectral, on a alors $f(M) = U^* f(D)U$ où $f(D) = \text{diag}((f(\lambda_i))_{1 \leq i \leq n})$. Pour généraliser cette définition, il suffit de vérifier que le membre de droite ne dépend pas du choix de décomposition de M pour f quelconque.

Définition 1.1.5 (Fonction matricielle). Une fonction matricielle \bar{f} est définie à partir d'une fonction $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ sur $\bigcup_n \mathbb{H}_n(a, b)$ en posant, pour $M \in \mathbb{H}_n(a, b)$, et $(U, D, (\lambda_i)_i)$ une décomposition de M ,

$$\bar{f}(M) = U^* \bar{f}(D)U$$

où $\bar{f}(D) = \text{diag}((f(\lambda_i))_{1 \leq i \leq n})$. Cette matrice est bien définie et hermitienne de taille n . On note encore f cette fonction matricielle, qui la prolonge bien en assimilant $]a; b[$ et $\mathbb{H}_1(a, b)$.

Remarque 1.1.6. Avec les notations de la définition 1.1.5, la définition de $\bar{f}(M)$ ne dépend pas du choix de décomposition de M .

En effet, prenons g une interpolation polynomiale de f sur le spectre de M et $(V, D', (\mu_i)_i)$ une seconde décomposition de M . En faisant usage du fait que $g(M)$ est bien définie, on a :

$$U^* f(D)U = U^* g(D)U = g(M) = V^* g(D')V = V^* f(D')V.$$

En conséquence, l'application de f peut se faire sur chaque bloc diagonal, en orthodiagonalisant par blocs.

Maintenant que les fonctions matricielles sont définies, nous sommes en mesure de formuler les deux théorèmes que nous prouvons dans ce document.

1.2 FORMULATION DES THÉORÈMES

L'objet de notre étude sera la classe des fonctions réelles matricielles monotones sur $\mathbb{H}_n(a, b)$, appelées fonctions monotones d'ordre n sur $]a; b[$. Ce sont les fonctions matricielles croissantes pour l'ordre de Loewner sur cet ensemble.

Définition 1.2.1. On définit $P_n(a, b)$ l'ensemble des fonctions matricielles monotones d'ordre n sur $]a; b[$. C'est-à-dire :

$$P_n(a, b) = \{f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R} \mid \forall A, B \in \mathbb{H}_n(a, b), A \leq B \implies f(A) \leq f(B)\}$$

On note aussi $P_\infty(a, b) = \bigcap_n P_n(a, b)$. Ses éléments sont appelés les fonctions matricielles monotones sur $]a; b[$.

Remarque 1.2.2. A partir de cette définition, plusieurs propriétés apparaissent :

1. $P_1(a, b)$ est l'ensemble des fonctions réelles croissantes sur $]a; b[$. On ne précisera plus que l'on suppose $n \geq 2$ lorsque l'on écrit $P_n(a, b)$.
2. Si $m < n$, alors $P_n(a, b) \subset P_m(a, b)$. En particulier, toutes les fonctions matricielles monotones sont des fonctions réelles croissantes sur l'intervalle en question.
En effet, si $f \in P_n(a, b)$, et $A, B \in \mathbb{H}_m(a, b)$, on construit les matrices $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{H}_n(a, b)$ en élargissant A et B avec des zéros.
Dès lors, on a $f(A) \geq f(B) \iff f(\tilde{A}) \geq f(\tilde{B})$ en orthodiagonalisant par blocs.
3. $P_n(a, b)$ est un cône convexe, stable par convergence simple et composition compatible : si $f \in P_n(a, b)$ et $g \in P_n(f(a^+), f(b^-))$, alors $g \circ f \in P_n(a, b)$.
4. Si $]c; d[\subset]a; b[$, alors $P_n(a, b) \subset P_n(c, d)$.

Nous allons établir dans un premier temps la caractérisation suivante, qui a déjà un intérêt propre.

Théorème 1.2.3 (Premier théorème de Loewner). *Une fonction f appartient à $P_n(a, b)$ si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $f \in \mathcal{C}^{2n-3}(]a; b[, \mathbb{R})$
- (ii) $f^{(2n-3)}$ est convexe sur $]a; b[$
- (iii) Pour presque tout $x \in]a; b[$, $M_n(x, f) \geq 0$, où

$$M_n(x, f) = \left(\frac{1}{(i+j-1)!} f^{(i+j-1)}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Cette caractérisation va nous permettre de prouver le théorème de Loewner suivant, où l'on note $\mathcal{H}_\pm = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \in \mathbb{R}_\pm^*\}$:

Théorème 1.2.4 (Deuxième théorème de Loewner). *Une fonction matricielle $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ est monotone si, et seulement si il existe $\tilde{f} :]a; b[\cup \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_- \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

- (i) $\tilde{f}(]a; b[) \subset \mathbb{R}$ et $\tilde{f}|_{]a; b[}^{\mathbb{R}} = f$,
- (ii) \tilde{f} est analytique,
- (iii) $\tilde{f}(\mathcal{H}_+) \subset \overline{\mathcal{H}_+}$

Il est en particulier intéressant de remarquer la nature essentiellement analytique de cette caractérisation, alors qu'étant donné la construction des objets étudiés, nous aurions pu nous attendre à une caractérisation plus algébrique.

Remarque 1.2.5. *Les fonctions matricielles monotones sont en particulier des fonctions réelles croissantes mais la réciproque est fautive. Le cas de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ pour $n = 2$ peut s'observer en posant les deux matrices $A > 0$ et $B > 0$:*

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Un rapide calcul montre que

$$A - B = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

mais que

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 621 & 62 \\ 62 & -5 \end{pmatrix} \not\geq 0$$

Le deuxième théorème de Loewner permet de répondre complètement à la question de la monotonie matricielle des fonctions puissances.

Corollaire 1.2.6. *Pour $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $f : x \mapsto x^t$ est matriciellement monotone sur $]0; +\infty[$ si et seulement si $t \in [0; 1]$.*

Remarque 1.2.7. *On voit par exemple avec le théorème 1.2.4 que les fonctions logarithme et tangente sont aussi matriciellement monotones, respectivement sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]0; \frac{\pi}{2}[$, alors que ce n'est pas le cas de l'exponentielle.*

On peut aussi retrouver ces résultats par des méthodes plus élaborées (cf. [BaPo], propositions 5.3.7 et 5.3.8 p. 158 et 159)

Le but de ce document est de prouver deux théorèmes de Loewner caractérisant la monotonie matricielle.

Pour ce faire, nous allons introduire les matrices de Loewner et leur généralisation dans la première partie. Ces outils permettent de mettre en évidence la matrice qui apparaît dans l'énoncé du premier théorème de Loewner.

Ensuite, nous montrons le sens direct du premier théorème de Loewner en passant d'abord par le cas où la fonction étudiée est lisse. On prouve alors le cas général en régularisant la fonction. Pour montrer le sens réciproque, il faut mettre en évidence la localité de l'appartenance à $P_n(a, b)$.

Enfin, l'étude des fonctions de Pick et le premier théorème de Loewner nous donnent les outils pour démontrer le deuxième théorème de Loewner.

2

MATRICES DE LOEWNER

L'objectif de cette section est la démonstration d'une première caractérisation de la monotonie matricielle qui est utile et efficace dans le cas d'exemples explicites. La généralisation des outils que sa preuve nous amène à introduire contribuera aussi à la démonstration du théorème 1.2.3.

2.1 CONTEXTE

On va chercher à obtenir une première généralisation du critère ci-dessous, valable pour f dérivable sur $]a; b[$:

f est croissante sur $]a; b[$ si, et seulement si, $f' \geq 0$ sur $]a; b[$.

Pour cela, il nous faut déjà définir une notion de dérivée s'appliquant à une fonction matricielle.

Définition 2.1.1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(]a; b[)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]a; b[$. On note $f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de taille n dont le coefficient d'indice (i, j) vaut $\frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$ si $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $f'(\lambda_i)$ si $\lambda_i = \lambda_j$.

Remarque 2.1.2. Comme la définition le suggère déjà, par la suite, on va de plus en plus raisonner sur des n -uplets de réels et moins sur des matrices hermitiennes, le lien entre ces deux objets étant fait par le théorème spectral 1.1.3.

Voici le théorème central de cette section.

Théorème 2.1.3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(]a; b[)$. Alors f est matriciellement monotone d'ordre n sur $]a; b[$ si, et seulement si, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]a; b[$, $f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$.

La suite de cette section introduit les outils techniques utiles à la démonstration de ce théorème.

2.2 PRÉLIMINAIRES

Maintenant que les fonctions matricielles sont définies, il est important de revenir sur quelques caractérisations des éléments de \mathbb{H}_n^+ et \mathbb{H}_n^{++} pour observer un lien clair avec l'ordre de Loewner 1.1.2.

Proposition 2.2.1. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{H}_n$. Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) M est (resp. définie) positive

- (ii) Les valeurs propres de M sont (resp. strictement) positives
- (iii) (matrice de Gram) Il existe E un espace de Hilbert sur \mathbb{C} de dimension n et une famille (resp. libre) de vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tels que $m_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- (iv) Il existe P_1, P_2, \dots, P_n des projecteurs orthogonaux de rang 1 et dont la somme vaut l'identité, et c_1, \dots, c_n des réels positifs (resp. strictement positifs) tels que $M = \sum_{i=1}^n c_i P_i$

Remarque 2.2.2. En particulier, cela indique que pour $A, B \in \mathbb{H}_n$, le fait que A et B soient comparables, et leur ordre éventuel ne dépend que du signe des valeurs propres de $B - A$. Aussi, l'ordre est invariant par conjugaison des éléments comparés par une même matrice unitaire. Si f est une fonction matricielle, il suffit alors de connaître l'image par f des valeurs propres de $B - A$ pour statuer sur la comparabilité et l'ordre éventuel de $f(A)$ et $f(B)$.

Rappelons un résultat sur les coefficients diagonaux des matrices positives qui sera utile.

Lemme 2.2.3. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{H}_n^+$. Les coefficients diagonaux de M sont tous positifs.

Démonstration. On note $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ les vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^n . Pour $1 \leq i \leq n$, $m_{i,i} = \langle e_i, M e_i \rangle \geq 0$. \square

Une autre formulation utile de la définie positivité nous est donnée par le critère de Sylvester.

Proposition 2.2.4 (Critère de Sylvester). Une matrice est définie positive si, et seulement si, ses mineurs principaux sont tous strictement positifs.

Nous pouvons caractériser de façon similaire les matrices positives au sens large.

Proposition 2.2.5 (Critère de Sylvester faible). Une matrice est positive si, et seulement si, ses mineurs diagonaux sont tous positifs.

Remarque 2.2.6. On appelle mineur diagonal d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ le déterminant d'une sous matrice carrée obtenue en enlevant les mêmes indices de colonnes et de lignes. C'est à dire les matrices de la forme $(m_{i,j})_{i,j \in S}$ où $S \subset \llbracket 1; n \rrbracket$. Autrement dit, ce sont les déterminants des sous matrices carrées dont la diagonale est incluse dans la diagonale de M .

Définition 2.2.7. L'opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_n)$ est dit positif lorsque $P(\mathbb{H}_n^+) \subset \mathbb{H}_n^+$, avec $\mathcal{L}(\mathbb{H}_n)$ l'ensemble des applications \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{H}_n dans lui-même.

Définition 2.2.8 (Produit de Schur). Le produit de Schur de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de taille n , noté $A \odot B$, est défini comme la matrice dont les coefficients sont donnés par :

$$(A \odot B)_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j}$$

On peut construire des opérateurs positifs grâce à des matrices positives de façon assez naturelle en passant par le produit de Schur.

Proposition 2.2.9. Pour $H \in \mathbb{H}_n$, on note P_H l'opérateur défini pour $M \in \mathbb{H}_n$ par $P_H(M) = H \odot M$.

On a l'équivalence suivante :

$$P_H \text{ est positif} \iff H \geq 0.$$

Preuve. Si P_H est positif, puisque la matrice $\mathbb{1} = (1)_{i,j}$ est positive, $H = P_H(\mathbb{1}) \geq 0$.

Réciproquement, le point (iv) de la proposition 2.2.1 assure qu'il suffit de montrer que le produit de Schur de deux projecteurs orthogonaux P et Q de rang 1 est positif.

Or, dans ce cas, avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ vecteurs propres respectifs de P, Q de norme 1, on a $P = UU^* = (u_i \overline{u_j})_{i,j}$, $Q = VV^* = (v_i \overline{v_j})_{i,j}$ comme le prouve l'évaluation en U (resp. V) et sur un vecteur orthogonal à celui-ci. On note aussi $W = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ \vdots \\ u_n v_n \end{pmatrix}$

Donc

$$P \odot Q = (u_i v_i \overline{u_j v_j})_{i,j} = WW^* \geq 0$$

car $\frac{WW^*}{W^*W}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}W$. D'où la positivité de P_H . \square

Remarque 2.2.10. *Ce nouvel outil permet aussi de prouver la monotonie matricielle de la fonction racine carrée sur $]0; \infty[$ (cf. [BaPo], proposition 1.2.9 p. 9).*

Maintenant que les objets et théorèmes principaux ont été introduits, nous pouvons élaborer des résultats nous rapprochant du théorème 1.2.3 et du théorème 1.2.4.

De façon assez naturelle, notre dérivée matricielle, c'est-à-dire la matrice de Loewner d'une fonction matricielle f , est reliée à la différentielle de f , qui généralise déjà la dérivation. Afin de différencier f sur $\mathbb{H}_n(a, b)$, regardons quelques propriétés topologiques.

Lemme 2.2.11. $\mathbb{H}_n(a, b)$ est un ouvert convexe de \mathbb{H}_n .

Preuve. Soit $M \in \mathbb{H}_n$. On note $\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$ son spectre ordonné, qui existe par le théorème 1.1.3.

Dans tout ce qui suit, il suffit de montrer que $\lambda_1(M) > a$ et $\lambda_n(M) < b$ pour avoir $M \in \mathbb{H}_n(a, b)$ Montrons d'abord les résultats suivants :

$$\lambda_1(M) = \inf_{\|x\|=1, x \in \mathbb{C}^n} \langle Mx, x \rangle$$

et

$$\lambda_n(M) = \sup_{\|x\|=1, x \in \mathbb{C}^n} \langle Mx, x \rangle$$

On prend $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M . Soit $x \in \mathbb{C}^n$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$. On a

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^* M \varepsilon_i |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(M) |x_i|^2 \geq \lambda_1(M) \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}_{=1}$$

L'inégalité est en fait une égalité sur $x = \varepsilon_1$. D'où la première égalité.

La seconde se montre de façon analogue en majorant $\lambda_i(M)$ par $\lambda_n(M)$.

L'équivalence des normes en dimension finie permet de travailler avec la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{H}_n .

Pour tout $H \in \mathbb{H}_n$, $\|H\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(H)^2$ par le théorème spectral. Alors $\forall 1 \leq i \leq n$, $|\lambda_i(H)| \leq \|H\|_2$. Soit $A \in \mathbb{H}_n(a, b)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda_1(A) \geq a + \varepsilon$ et $\lambda_n(A) \leq b - \varepsilon$. Pour tout $H \in \mathbb{H}_n$ de norme 2 suffisamment petite, ses valeurs propres sont de norme inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. La matrice $A + H$ est hermitienne et par ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ unitaire

$$\langle (A + H)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Hx, x \rangle \geq \underbrace{\inf_{\|x\|=1, x \in \mathbb{C}^n} \langle Ax, x \rangle}_{\lambda_1(A)} + \underbrace{\inf_{\|x\|=1, x \in \mathbb{C}^n} \langle Hx, x \rangle}_{\lambda_1(H)}.$$

En passant à l'infimum dans le membre de gauche,

$$\lambda_1(A + H) \geq \lambda_1(A) + \lambda_1(H) \geq a + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \geq a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De la même manière,

$$\lambda_n(A + H) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(H) \leq b - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \leq b - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où $\text{Sp}(A + H) \subset]a; b[$ et $A + H \in \mathbb{H}_n(a, b)$

Quant à la convexité, fixons $t \in [0, 1]$ et $A, B \in \mathbb{H}_n(a, b)$. On note $C = tA + (1 - t)B \in \mathbb{H}_n$.

On a, par les mêmes minoration :

$$\lambda_1(C) \geq \lambda_1(tA) + \lambda_1((1 - t)B) = t\lambda_1(A) + (1 - t)\lambda_1(B) > a.$$

De même $\lambda_n(C) < b$. D'où $C \in \mathbb{H}_n(a, b)$, ce qui conclut. \square

2.3 PREUVE DU THÉORÈME

Avant de passer à la preuve du théorème annoncé, il faut faire le lien entre la matrice de Loewner et la différentielle.

Lemme 2.3.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(]a; b[)$ et $A \in \mathbb{H}_n(a, b)$. La fonction matricielle f est différentiable sur $\mathbb{H}_n(a, b)$ et sa différentielle en A s'écrit, pour $H \in \mathbb{H}_n$ et $(U, \Lambda, (\lambda_i)_i)$ une décomposition de A donnée par le théorème spectral 1.1.3,*

$$D(f)(A)(H) = U^* \left(f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \odot (UHU^*) \right) U$$

Preuve. On s'appuie sur la définition $D(f)(A)(H) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A+tH) - f(A)}{t}$ lorsque cette limite existe.

Étape 1 On suppose dans un premier temps $U = I_n$, c'est-à-dire $A = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et f est la fonction puissance $m \in \mathbb{N}$, différentiable. On a alors pour $H = (h_{i,j}) \in \mathbb{H}_n$:

$$D(f)(\Lambda)(H) = \sum_{k=1}^m \Lambda^{k-1} H \Lambda^{m-k} = \left(\sum_{k=1}^m \lambda_i^{k-1} h_{i,j} \lambda_j^{m-k} \right)_{i,j}$$

Or le coefficient (i, j) de $f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est $\sum_{k=1}^m \lambda_i^{k-1} \lambda_j^{m-k}$. D'où $D(f)(\Lambda)(H) = f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \odot H$

Étape 2 On ne suppose plus A diagonale. Le même calcul donne

$$\begin{aligned} D(f)(A)(H) &= \sum_{k=1}^n (U^* \Lambda U)^{k-1} H (U^* \Lambda U)^{n-k} \\ &= U^* \left(\sum_{k=1}^n \Lambda^{k-1} (U H U^*) \Lambda^{n-k} \right) U \end{aligned}$$

En reconnaissant le calcul de l'étape 1, on a le résultat dans ce cas.

Étape 3 Par linéarité, le résultat s'étend à tous les polynômes. On se place sur un segment K contenant $[-\|A\|_2 - 1, \|A\|_2 + 1]$. Par le théorème de Weierstrass polynomial, il existe une suite $(f_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément sur ce segment vers f et dont les dérivées convergent aussi uniformément vers f' sur K .

Étape 4 On note $\mathcal{D}(f)(A)(H)$ le membre de droite de cette équation de sorte à montrer que $\mathcal{D}(f)(A)(H) = D(f)(A)(H)$. Nous avons déjà démontré l'égalité pour f fonction polynomiale. En particulier, dans ce cas, ce terme ne dépend pas de la décomposition de A choisie. Par la suite, on raisonne avec la norme 2 sur les matrices

$$\|A\| = \text{Tr}(A^* A)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

Comme H est amené à tendre vers 0, on suppose $\|H\| \leq 1$.

On a d'une part

$$\begin{aligned} &\|f(A+H) - f(A) - \mathcal{D}(f)(A)(H)\| \\ &\leq \|(f(A+H) - f(A)) - (f_n(A+H) - f_n(A))\| \\ &\quad + \|f_n(A+H) - f_n(A) - \mathcal{D}(f_n)(A)(H)\| \\ &\quad + \|\mathcal{D}(f)(A)(H) - \mathcal{D}(f_n)(A)(H)\| \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire.

Contrôlons le premier terme du membre de droite. Soient $m, n > 0$. On note L le segment de droite joignant A et $A+H$ dans \mathbb{H}_n . L'inégalité des accroissements finis généralisée donne :

$$\begin{aligned} &\|(f_m(A+H) - f_m(A)) - (f_n(A+H) - f_n(A))\| \\ &\leq \|H\| \sup_{X \in L} \|D(f_n - f_m)(X)\| \\ &\leq \|H\| \sup_{X \in L} \|\mathcal{D}(f_n - f_m)(X)\| \text{ par le cas des polynômes} \end{aligned}$$

Par souci de clarté, on note $g = f_n - f_m$. Par ce qui précède, pour $X \in L$, et $Y \in \mathbb{C}^*$ de norme 1 et $(V, T, (\mu_i)_i)$ une décomposition de X ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}(g)(X)(Y)\| &= \|V^* (g^{(1)}(T) \odot (VYV^*)) V\| \\ &= \|g^{(1)}(T) \odot (VYV^*)\| \text{ car } V \text{ est unitaire} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j} |g^{(1)}(T)_{i,j} (VYV^*)_{i,j}|^2} \end{aligned}$$

Or par l'inégalité des accroissements finis, pour $1 \leq i, j \leq n$, comme $\|T\| = \|X\| \leq \|A\| + 1$

$$|g^{(1)}(T)_{i,j}|^2 \leq \sup_{|t| \leq \|X\|} |g'(t)| \leq \sup_{|t| \leq \|A\|+1} |g'(t)|.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}(f_m - f_n)(X)(Y)\| &\leq \sup_{|t| \leq \|A\|+1} |g'(t)| \underbrace{\sqrt{\sum_{i,j} |(VYV^*)_{i,j}|^2}}_{=\|VYV^*\|} \\ &\leq \sup_{|t| \leq \|A\|+1} |g'(t)| \text{ car } Y \text{ est de norme 1 et } V \text{ unitaire} \\ &\leq \|f'_n - f'_m\|_{\infty, K} \end{aligned}$$

D'où

$$\|(f_m(A+H) - f_m(A)) - (f_n(A+H) - f_n(A))\| \leq \|H\| \|f'_n - f'_m\|_{\infty, K}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on a

$$\|(f(A+H) - f(A)) - (f_n(A+H) - f_n(A))\| \leq \|f'_n - f'\|_{\infty, K} \|H\|$$

De même que ce que l'on a fait pour g , on a pour le troisième terme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}(f)(A)(H) - \mathcal{D}(f_n)(A)(H)\| &= \|\mathcal{D}(f - f_n)(A)(H)\| \text{ par linéarité} \\ &\leq \|f' - f'_n\|_{\infty, K} \|H\| \end{aligned}$$

Contrôlons le deuxième terme. Dans le cas polynomial $\mathcal{D}(f_n)$ et $D(f_n)$ sont les mêmes. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|f'_n - f'\|_{\infty, K} \leq \varepsilon$$

Pour $n = N$, et pour H suffisamment petit, on a aussi

$$\|f_N(A+H) - f_N(A) - \mathcal{D}(f_N)(A)(H)\| \leq \varepsilon \|H\|$$

On en déduit donc en combinant les trois termes

$$\|f(A+H) - f(A) - \mathcal{D}(f)(A)(H)\| \leq 3\varepsilon \|H\|$$

pour H suffisamment petit. D'où le résultat pour f par définition de la différentielle. \square

Nous pouvons désormais prouver le théorème 2.1.3.

Démonstration du théorème 2.1.3. Supposons dans un premier temps que f est matriciellement monotone d'ordre n sur $]a; b[$ et fixons $M \in \mathbb{H}_n(a, b)$ et $(U, \Lambda, (\lambda_i)_i)$ une décomposition de M donnée par le théorème spectral 1.1.3. Notons $\mathbb{1}$ la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Comme $\mathbb{1}$ est un projecteur orthogonal, $\mathbb{1} \in \mathbb{H}_n^+$.

Pour $t > 0$ suffisamment petit, $M + t\mathbb{1} \in \mathbb{H}_n(a, b)$ car c'est un ouvert selon le lemme 2.2.11. Or $M + t\mathbb{1} \geq M$. Donc $f(M + t\mathbb{1}) \geq f(M)$ de sorte que

$$\frac{f(M + t\mathbb{1}) - f(M)}{t} \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit $D(f)(M)(\mathbb{1}) \geq 0$. La positivité étant invariante par changement de base, on conclut avec le lemme 2.3.1 grâce à $0 \leq f^{(1)}(\Lambda) \odot \mathbb{1} = Uf^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^*$. Réciproquement, si pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]a; b[$, $f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$, considérons $A, B \in \mathbb{H}_n(a, b)$ tels que $A \leq B$. Soit $t \in [0; 1]$. Par convexité, $A(t) := (1 - t)A + tB \in \mathbb{H}_n(a, b)$. Ainsi, en notant $(U(t), \Lambda(t), (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)))$ une décomposition de $A(t)$, $f^{(1)}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \geq 0$. Par la proposition 2.2.9,

$$\underbrace{f^{(1)}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))}_{\geq 0} \odot \underbrace{UA'(t)U^*}_{=U(B-A)U^* \geq 0} \geq 0$$

Le lemme 2.3.1 donne alors, avec un changement de base orthonormal, $D(f)(A(t))(A'(t)) \geq 0$, et il vient finalement :

$$f(B) - f(A) = \int_0^1 D(f)(A(t))(A'(t)) dt \geq 0.$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.3.2 (Fonctions homographiques). *Appliquons ce théorème pour l'exemple fondamental des fonctions matricielles monotones : la fonction homographique $f : t \in I \mapsto \frac{at+b}{ct+d} \in \mathbb{R}$ avec $ad - bc > 0$ qui conserve l'ordre sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.*

En effet, la matrice de Loewner associée, notée A , a pour coefficient d'indice (i, j) $\frac{ad-bc}{(c\lambda_i+d)(c\lambda_j+d)}$.

Pour tout $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, il vient

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &= (ad - bc) \sum_{i,j} \frac{x_i}{c\lambda_i + d} \overline{\left(\frac{x_j}{c\lambda_j + d} \right)} \\ &= (ad - bc) \|\tilde{x}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

avec $\tilde{x} := \begin{pmatrix} \frac{x_1}{c\lambda_1+d} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{c\lambda_n+d} \end{pmatrix}$. La matrice de Loewner associée est donc bien positive.

Remarque 2.3.3. *Pour d'autres exemples de fonctions usuelles qui conservent l'ordre, il faut davantage étudier la structure des termes de la matrice de Loewner associée. Pour cela, on pourra se référer à [BaPo] (chapitre 5, p. 141).*

L'intérêt du théorème 2.1.3 est surtout qu'il s'applique facilement lorsque la fonction f est régulière, mais nous allons généraliser ce résultat à des fonctions sans hypothèse de régularité. Nous introduisons un objet qui sera crucial : les différences divisées.

2.4 DIFFÉRENCES DIVISÉES ET MATRICE DE LOEWNER GÉNÉRALISÉE

Afin de faire apparaître le lien entre la monotonie matricielle d'une fonction f et la matrice $M_n(x, f)$, nous étudions les différences divisées.

Définition 2.4.1. Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $(n + 1)$ -uplet (x_0, \dots, x_n) d'éléments de $]a; b[$ deux à deux distincts, on définit la n -ième différence divisée associée à f par :

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]_f = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Remarque 2.4.2. A partir de cette définition, on constate que toute différence divisée est invariante par permutation des x_i . Autrement dit les différences divisées sont symétriques en ces variables.

Remarque 2.4.3. Cette définition de la différence divisée correspond au coefficient dominant du polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à ce $(n + 1)$ -uplet.

Rappelons que ce polynôme P est égal à $P = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i$ avec $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a naturellement $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ et on reconnaît son coefficient dominant par ce qui précède. Puisque pour $0 \leq i, j \leq n$, $L_i(x_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$, L_i est une \mathbb{K} -base de $\mathbb{K}_n[X]$, pour \mathbb{K} un corps contenant \mathbb{R} .

En reprenant la construction de la matrice de Loewner, on va encoder l'appartenance d'une fonction f à $P_n(a, b)$ dans une matrice dite de Loewner généralisée.

Définition 2.4.4. Pour $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ et des réels $a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < b$, on appelle matrice de Loewner généralisée formée par les $(\xi_i)_i$ et $(\eta_i)_i$ associée à la fonction f la matrice

$$L = ([\xi_i, \eta_j]_f)_{i,j}.$$

Le théorème suivant, permet alors de faire le lien avec les fonctions matricielles monotones d'ordre n en nous rapprochant de la matrice apparaissant dans l'énoncé du théorème 1.2.3.

Théorème 2.4.5. Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in P_n(a, b)$, alors pour tous $2n$ réels $a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < b$, la matrice de Loewner généralisée L formée par les $(\xi_i)_i$ et $(\eta_i)_i$ associée à la fonction f est de déterminant positif.

Remarque 2.4.6. Pour généraliser la positivité de la matrice de Loewner, on ne peut pas exiger celle de la matrice de Loewner généralisée construite. Elle n'est même pas symétrique.

Rappelons des propriétés élémentaires des différences divisées qui seront utiles à la démonstration du théorème 2.4.5.

Proposition 2.4.7. Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ et un $(n+1)$ -uplet (x_0, \dots, x_n) d'éléments de $]a; b[$ deux à deux distincts. On a la formule récursive suivante :

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]_f = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]_f - [x_1, x_2, \dots, x_n]_f}{x_0 - x_n}$$

Démonstration. Il s'agit de passer par la définition et de réarranger correctement les termes. En notant $S = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]_f - [x_1, x_2, \dots, x_n]_f$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{f(x_0)}{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x_0 - x_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i) ((x_i - x_n) - (x_i - x_0))}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (x_i - x_j)} - \frac{f(x_n)}{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x_n - x_j)} \\ &= (x_0 - x_n) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = (x_0 - x_n) [x_0, x_1, \dots, x_n]_f \end{aligned}$$

□

Nous pouvons déjà mettre en évidence le lien entre les différences divisées et la dérivation, qui intervient dans la matrice $M_n(x, f)$ grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.4.8. Soit $f \in \mathcal{C}^n(]a; b[, \mathbb{R})$ et $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Il existe $w \in [x_0; x_n]$ tel que

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]_f = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}$$

Démonstration. Cette relation se démontre avec le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points x_0, \dots, x_n . En reprenant la construction de la remarque 2.4.3, on note P ce polynôme. On pose ensuite $Q : x \in [x_0; x_n] \mapsto P(x) - f(x) \in \mathbb{R}$: cette fonction s'annule $n+1$ fois, aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut appliquer le théorème de Rolle à Q sur le segment $[x_{i-1}; x_i]$ car Q est continue sur $[x_{i-1}; x_i]$ et dérivable sur $]x_{i-1}; x_i[$ et vérifie $Q(x_{i-1}) = Q(x_i) = 0$. Il existe ainsi $y_i \in]x_{i-1}; x_i[$ tel que $Q'(y_i) = 0$. Puisque les y_1, \dots, y_n vérifient $x_0 < y_1 < x_1 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_n < x_n$, ces réels sont deux à deux distincts.

Nous venons donc de démontrer que si une fonction dérivable Q s'annule $n+1$ fois, sa dérivée s'annule au moins n fois. Par récurrence, $Q^{(n)}$ s'annule au moins une fois et donc il existe $w \in [x_0; x_n]$ tel que $Q^{(n)}(w) = 0$. D'où $P^{(n)}(w) = f^{(n)}(w)$. On conclut en dérivant n fois le polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$P^{(n)}(w) = \sum_{i=1}^n \frac{n! f(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} = n! [x_0, x_1, \dots, x_n]_f.$$

□

Remarque 2.4.9. La proposition 2.4.8 permet de voir les différences divisées comme une généralisation du taux d'accroissement. La matrice de Loewner généralisée porte ainsi bien son nom si on a une fonction plus régulière.

Si f est analytique on peut interpréter les différences divisées comme des intégrales le long d'un chemin.

Lemme 2.4.10. *Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ analytique et un $(n + 1)$ -uplet (x_0, \dots, x_n) d'éléments de $]a; b[$ deux à deux distincts et γ un lacet entourant ces réels.*

On a

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]_f = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\prod_{i \neq j} (z - x_j)} dz.$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème des résidus à la fonction g définie par

$$g : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{f(z)}{\prod_{i \neq j} (z - x_j)} \in \mathbb{C}$$

Cette fonction g est méromorphe et admet comme pôles exactement x_0, x_1, \dots, x_{n-1} et x_n . \square

2.5 PAIRES PROJECTIVES

Dans notre définition 2.4.4 de la matrice de Loewner généralisée, il nous faut une condition d'entrelacement de deux n -uplets. Celle-ci sera agréablement encodée par des paires projectives, faisant le lien avec le spectre des matrices, comme nous le verrons dans cette section.

Définition 2.5.1. *Un triplet $(A, B, v) \in \mathbb{H}_n^2 \times \mathbb{C}^n$ est une paire projective de taille n si $B - A = vv^*$.*

Elle est dite stricte si v n'est orthogonal à aucun vecteur propre de A .

Voici le résultat central sur les paires projectives qui justifie leur introduction :

Théorème 2.5.2. *Soit (A, B, v) une paire projective de taille n alors*

$$\lambda_n(B) \geq \lambda_n(A) \geq \lambda_{n-1}(B) \geq \lambda_{n-1}(A) \cdots \geq \lambda_1(B) \geq \lambda_1(A)$$

De plus, (A, B, v) est stricte si, et seulement si, toutes les inégalités sont strictes. Réciproquement, étant donnés deux n -uplets entrelacés

$$b_n \geq a_n \geq b_{n-1} \geq a_{n-1} \cdots \geq b_1 \geq a_1$$

il existe une paire projective (A, B, v) avec $\lambda_i(A) = a_i$ et $\lambda_i(B) = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

Remarque 2.5.3. *Cette proposition montre bien l'équivalence entre la condition d'entrelacement et les paires projectives.*

Montrons dans un premier temps un résultat technique liant les valeurs propres des matrices d'une paire projective via leur polynôme caractéristique χ .

Lemme 2.5.4. Soit (A, B, v) une paire projective de taille n . Pour tout $z \in \mathbb{C}$ n'étant pas valeur propre de A ou B , on a

$$\chi_B(z) = \chi_A(z)(1 + \langle v, (A - zI_n)^{-1}v \rangle)$$

et

$$\chi_B(z)(zI_n - B)^{-1}v = \chi_A(z)(zI_n - A)^{-1}v.$$

Démonstration. On écrit

$$\chi_B(z) = \det(B - zI_n) = \det(A + vv^* - zI_n) = \det(A - zI_n) \det(I_n + (A - zI_n)^{-1}vv^*)$$

Or, comme la matrice $(A - zI_n)^{-1}$ est inversible, la matrice $C = (A - zI_n)^{-1}vv^*$ a même rang que la matrice vv^* , à savoir 1. Il existe donc P matrice de changement de base et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$C = P^{-1} \begin{pmatrix} O_{n-1} & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P$$

et $\lambda = \text{Tr}(C)$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} \det(I_n + (A - zI_n)^{-1}vv^*) &= \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix} \\ &= 1 + \lambda \\ &= 1 + \text{Tr}(\underbrace{(A - zI_n)^{-1}vv^*}_{\text{noté } u}) \\ &= 1 + \text{Tr}(uv^*) \\ &= 1 + \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

Ce qui donne la première égalité.

La seconde égalité en découle en multipliant les deux membres par $(zI_n - B)^{-1}v$ car :

$$\begin{aligned} (zI_n - B)^{-1}v(1 + \langle v, (A - zI_n)^{-1}v \rangle) &= \\ (zI_n - B)^{-1}v + (zI_n - B)^{-1}(zI_n - A - (zI_n - B))(A - zI_n)^{-1}v &= (zI_n - A)^{-1}v. \end{aligned}$$

□

Désignons les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathbb{H}_n$ par $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$.

Démonstration du théorème 2.5.2. Commençons par montrer que la paire n'est pas stricte si, et seulement si, A et B ont une valeur propre commune.

Si la paire n'est pas stricte, il existe un vecteur propre de A $w \in \mathbb{C}^n$ orthogonal à v . Alors $Bw = Aw + 0$. A et B ont en particulier une valeur propre commune.

Réciproquement, si il existe λ valeur propre commune à A et B associée respectivement à $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle &= \langle x, By \rangle \\ &= \langle x, Ay \rangle + \langle x, vv^*y \rangle \\ &= \langle Ax, y \rangle + v^*y \langle x, v \rangle \quad \text{car } A \text{ hermitienne} \\ &= \lambda \langle x, y \rangle + \langle v, y \rangle \langle x, v \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, v est orthogonal à x ou y . Dans le second cas, y est un vecteur propre commun à $A = B - vv^*$ et B . Dans les deux cas, la paire n'est pas stricte.

Pour montrer la première partie du lemme, montrons que l'on peut se ramener au cas strict. S'il existe un vecteur propre w à A orthogonal à v , c'est aussi un vecteur propre pour B pour la même valeur propre. On restreint notre problème à l'orthogonal de w , de dimension strictement inférieure. On obtient donc une nouvelle paire projective sur cet espace. Par récurrence finie, il reste juste à traiter le cas où la paire obtenue par ce processus est stricte car on n'enlève que des valeurs propres communes à A et B qui apparaissent plusieurs fois, et donc l'entrelacement est respecté dans le cas trivial de la chaîne d'égalité.

On suppose dès lors (A, B, v) stricte. On définit la fraction rationnelle réelle

$$F_{A,v}(X) = 1 + \langle v, (A - XI)^{-1}v \rangle$$

Dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui orthodiagonalise A , on a alors pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \text{Sp}(A)$

$$F_{A,v}(z) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{|\langle e_i, v \rangle|^2}{\lambda_i(A) - z}$$

Cela découle en effet de l'écriture $v = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v \rangle e_i$ dans cette même base. Par le lemme 2.5.4, on constate que les racines de $F_{A,v}$ sont des racines du polynôme caractéristique de B .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $F_{A,v}$ possède des racines entre chacun de ses pôles : on en dénombre $n - 1$ car le résultat montré plus haut assure qu'ici, $\lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \dots < \lambda_n(A)$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{A,v}(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \lambda_n(A)^+} F_{A,v}(x) = -\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'obtenir une n -ième racine de $F_{A,v}$, plus grande que $\lambda_n(A)$. Or, comme les racines de $F_{A,v}$ sont des valeurs propres de B , leur nombre force le fait que ce sont exactement les valeurs propres de B . L'entrelacement est alors visible sur le graphique précédent, ce qui conclut.

Réciproquement, on pose $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. On cherche donc $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $F_{A,v}$ s'annule

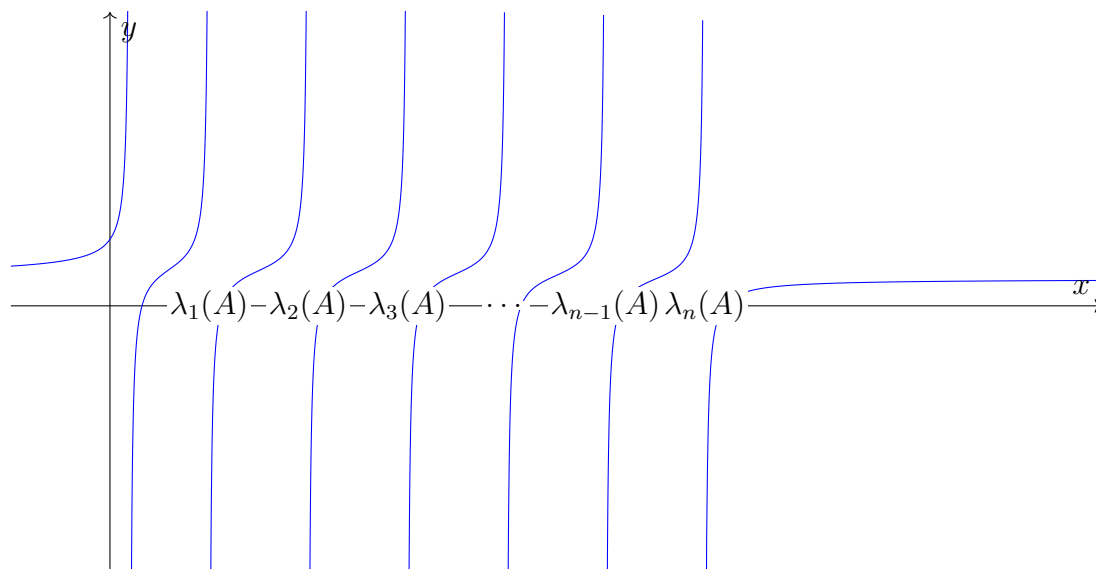


FIGURE 1 – Allure de $F_{A,v}(x)$ avec ses racines

exactement en les b_i . A nouveau, on peut supposer les inégalités strictes quitte à agrandir A, B par une matrice diagonale contenant $k_i \geq 0$ fois les a_i apparaissant $k_i + 1$ fois, et en ajoutant à v des 0.

On note F la fraction rationnelle réelle

$$F(X) = \frac{\prod_{i=1}^n b_i - X}{\prod_{i=1}^n a_i - X}$$

Par décomposition en éléments simples, il existe $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(X) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{a_i - X}$$

Dès lors, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$v_i = \lim_{x \rightarrow a_i} (a_i - X)F(X) = \frac{\prod_{j=1}^n b_j - a_i}{\prod_{j \neq i} a_j - a_i}$$

Les inégalités d'entrelacement assurent que $v_i > 0$.

On pose alors

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{v_1} \\ \sqrt{v_2} \\ \vdots \\ \sqrt{v_n} \end{pmatrix}$$

si bien que $F_{A,v} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{a_i - X} = F$ a bien exactement les b_i comme racines. Avec $B = A + vv^*$, (A, B, v) est donc une paire projective qui convient. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.4.5 annoncé dans la sous-partie précédente.

Démonstration du théorème 2.4.5. Soient $2n$ réels $a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < b$. Par le lemme 2.5.2, il existe une paire projective de taille n (A, B, v) avec $\text{Sp}(A) = \{\xi_i\}_i$ et $\text{Sp}(B) = \{\eta_i\}_i$ avec multiplicité. Quitte à conjuguer par une matrice unitaire, on suppose $A = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ et on note $C = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ matrice diagonale semblable à B . Plus précisément, il existe $U = (u_{i,j})_{i,j}$ une matrice unitaire de taille n telle que $B = U^{-1}CU$. On a :

$$CU - UA = Uvv^*$$

En considérant le coefficient d'indice (i, j) de cette égalité entre matrices, il vient

$$(\eta_i - \xi_j)u_{i,j} = \overline{v_j}F_i$$

où $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$ tels que $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $F_i = \sum_{k=1}^n u_{i,k}v_k$

Donc

$$u_{i,j} = \frac{\overline{v_j}F_i}{\eta_i - \xi_j}$$

Comme $f \in P_n(a, b)$, et $A \leq B$ par le point (iv) de la proposition 2.2.1, on a $f(B) - f(A) \geq 0$. Donc

$$U^{-1}f(C)U - f(A) \geq 0$$

et

$$\det U^{-1} \det (f(C)U - Uf(A)) \geq 0 \quad (*)$$

Or le terme en (i, j) de $f(C)U - Uf(A)$ vaut $\frac{f(\eta_i) - f(\xi_j)}{\eta_i - \xi_j} \overline{v_j}F_i$.

Son déterminant se factorise en lignes et en colonnes comme suit :

$$\det(f(C)U - Uf(A)) = \det(L) \prod_{k=1}^n \overline{v_k}F_k$$

Enfin on a de même,

$$\det U = \prod_{k=1}^n \overline{v_k}F_k \det \left(\frac{1}{\eta_i - \xi_j} \right)_{i,j} = \prod_{k=1}^n \overline{v_k}F_k \frac{\prod_{i < j} (\eta_j - \eta_i) \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)}{\underbrace{\prod_{i,j} (\eta_i - \xi_j)}_{\geq 0}}$$

On reconnaît ici un déterminant de Cauchy associé à ces n -uplets. La condition d'entrelacement assure sa positivité.

Cela permet de simplifier $(*)$ et d'obtenir $\det L \geq 0$. \square

Nous pouvons aussi montrer une réciproque partielle en supposant que la fonction f est \mathcal{C}^1 .

Théorème 2.5.5. *Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f soit de classe \mathcal{C}^1 et que pour tout $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $2m$ réels $a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_m < \eta_m < b$, la matrice de Loewner généralisée formée par les $(\xi_i)_i$ et $(\eta_i)_i$ associée à la fonction f est de déterminant positif. Alors $f \in P_n(a, b)$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $2m$ réels $a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_m < \eta_m < b$, la matrice de Loewner généralisée formée par les $(\xi_i)_i$ et $(\eta_i)_i$ associée à la fonction $f : L = ([\xi_i, \eta_j]_f)_{i,j}$ est de déterminant positif.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]a; b[$. Commençons par montrer qu'alors la matrice de Loewner définie en définition 2.1.1 $f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = ([\lambda_i, \lambda_j]_f)_{i,j}$ est positive.

Nous allons utiliser le critère de Sylvester faible 2.2.5. Soit m un mineur diagonal de taille $m \leq n$ de $([\lambda_i, \lambda_j]_f)_{i,j}$. Étant donné qu'il est diagonal, il existe des indices k_1, \dots, k_m tels que

$$m = \det([\lambda_{k_i}, \lambda_{k_j}]_f)_{1 \leq i, j \leq m}$$

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $\eta_{k_i}^{(r)} = \lambda_{k_i} + \frac{1}{r}$. Alors, pour r suffisamment grand, on a $a < \lambda_{k_1} < \eta_{k_1}^{(r)} < \lambda_{k_2} < \eta_{k_2}^{(r)} < \dots < \lambda_{k_m} < \eta_{k_m}^{(r)} < b$. Or, comme f est \mathcal{C}^1 , on a $[\eta_{k_i}^{(r)}, \lambda_{k_j}]_f \rightarrow [\lambda_{k_i}, \lambda_{k_j}]_f$ quand r tend vers $+\infty$. Le déterminant de L étant positif, par continuité du déterminant, on a donc

$$m = \det([\lambda_{k_i}, \lambda_{k_j}]_f)_{i,j} \geq 0.$$

Par le critère de Sylvester faible 2.2.5 : $f^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = ([\lambda_i, \lambda_j]_f)_{i,j}$ est positive.

Le théorème 2.1.3 assure alors que $f \in P_n(a, b)$. □

Nous pouvons ainsi faire un lien entre le déterminant de la matrice de Loewner généralisée associée à une fonction f et la matrice $M_n(x, f)$ qui joue un rôle central dans le premier théorème de Loewner.

Théorème 2.5.6. *Soit $n \geq 2$. On prend $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$ des éléments de $]a; b[$. Pour toute fonction $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$, on définit la matrice de Loewner étendue*

$$L^e = (L_{i,j}^e)_{i,j} = ([x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j]_f)_{i,j}$$

formée par les $(x_i), (y_j)$ et associée à f . Le déterminant de celle-ci est du même signe strict que celui de la matrice de Loewner généralisée L formée par les (x_i) et (y_j) et associée à f .

Idée de preuve. En faisant usage de la proposition 2.4.7 et grâce à des transvections sur les lignes puis les colonnes, on obtient que

$$\det(L) = \det([x_{i+1}, y_1, \dots, y_{j+1}]_f) \prod_{i>j} (x_i - x_j) = \det(L^e) \prod_{i>j} (x_i - x_j)(y_i - y_j).$$

La monotonie stricte des suites choisies permet de conclure.

En effet, les transvections-dilatations pour "éliminer" la variable x_k de la ligne $i > k$ sont de la forme " $X_i \leftarrow X_{i-1} - (x_k - x_i)X_i$ ". On procède "couche par couche" de bas en haut avec $k = i - 1, i - 2, \dots, 1$, puis de façon analogue de droite à gauche sur les colonnes. □

Avec cette matrice de Loewner étendue, on peut obtenir des informations sur le déterminant de la matrice apparaissant dans le théorème 1.2.3.

Théorème 2.5.7. *Pour $f \in P_n(a, b)$ de classe C^∞ et $x \in]a; b[$, on a*

$$\det M_n(x, f) \geq 0.$$

Démonstration. On prend $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n < b$ tels que $x \in]x_1; y_n[$. On note $L_{(x_i)_i, (y_j)_j, f}$ la matrice de Loewner étendue formée par les $(x_i)_i, (y_j)_j$ et associée à f .

Le théorème 2.4.5 et le théorème 2.5.6 assurent que $\det L_{(x_i)_i, (y_j)_j, f} \geq 0$.

Par la proposition 2.4.8, en faisant tendre les $(x_i)_i$ et $(y_j)_j$ entrelacés vers x , on obtient que

$$L_{(x_i)_i, (y_j)_j, f} \rightarrow M_n(x, f).$$

Par continuité du déterminant, on a bien $\det M_n(x, f) \geq 0$. □

Ces résultats nous permettent de montrer le sens direct du premier théorème de Loewner 1.2.3.

3

CONDITION NÉCESSAIRE DE MONOTONIE

L'objectif de cette section est de démontrer l'implication directe du premier théorème de Loewner 1.2.3. Nous travaillons dans un premier temps avec des hypothèses de régularité supplémentaires. Ensuite, nous introduirons les régularisations de fonctions intégrables afin de parvenir à une preuve complète.

3.1 CAS DES FONCTIONS LISSES

Nous procédons par récurrence sur $n \geq 2$ pour démontrer le sens direct du théorème 3.3 sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Commençons donc par le cas $n = 2$:

Preuve du sens direct du premier théorème de Loewner dans le cas $n = 2$ et f de classe \mathcal{C}^∞ .

On suppose ici $f \in \mathcal{C}^\infty(]a; b[, \mathbb{R})$ et $f \in P_2(a, b)$. Pour $x \in]a; b[$, le théorème 2.5.7 assure que :

$$\det M_2(x, f) = \det \begin{pmatrix} f'(x) & \frac{f''(x)}{2!} \\ \frac{f''(x)}{2!} & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Puisque $P_2(a, b) \subset P_1(a, b)$, f est en particulier une fonction réelle croissante. On distingue alors deux cas :

Premier cas : Il n'existe aucun intervalle ouvert non vide $I \subset]a; b[$ sur lequel f est strictement croissante. Autrement dit, f est constante sur $]a; b[$. Alors, $f' = 0$ est en particulier convexe.

Deuxième cas : Il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset]a; b[$ sur lequel f est strictement croissante. Alors, $f' > 0$ sur I et le calcul du déterminant précédent donne pour $x \in I$

$$0 \leq f'(x) \frac{f^{(3)}(x)}{3!} - \frac{f''(x)^2}{2!^2} \leq f'(x) \frac{f^{(3)}(x)}{3!}$$

et donc $0 \leq f^{(3)}(x)$.

En notant $U = f'^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ouvert par continuité de f' , on sait que pour $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $a < a_1^{(N)} < b_1^{(N)} < a_2^{(N)} < b_2^{(N)} < \dots < a_{k_N}^{(N)} < a_{k_N}^{(N)} < b$ tels que $U \cap]-N; N[= \bigsqcup_k]a_k^{(N)}; b_k^{(N)}[$. On a par ce qui précède que f' est convexe sur chaque $]a_k^{(N)}; b_k^{(N)}[$, c'est-à-dire que $f^{(3)} \geq 0$ sur ces intervalles.

En dehors, le premier cas donne que f' est nulle sur $(\bigcup_{0 \leq k \leq k_N}]b_k^{(N)}; a_{k+1}^{(N)}[) \cap]-N; N[$, où $b_0^{(N)} = a$, $a_{k_N+1}^{(N)} = b$. Donc $f^{(3)} \geq 0$ en particulier sur cet ensemble. Par continuité de $f^{(3)}$, c'est encore le cas sur l'adhérence de cet ensemble, qui vaut exactement $(]a; b[\cap]-N; N]) \setminus U$. Alors $f^{(3)} \geq 0$ sur $]a; b[\cap]-N; N[$, et ce pour N arbitrairement grand. On a donc en fait $f^{(3)} \geq 0$ sur $]a; b[$ et f' est convexe.

Pour finir la preuve nous allons utiliser le critère de Sylvester 2.2.4. Cependant, pour $x \in]a; b[$, le premier mineur principal de $M_2(x, f)$ vaut $f'(x)$ qui n'est pas nécessairement strictement positif. Nous allons donc translater $M_2(x, f)$ de façon à arriver dans \mathbb{H}_2^{++} . Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in]a; b[$, le premier mineur principal de $M_2(x, f) + \varepsilon I_2 \in \mathbb{H}_2$ vaut $f'(x) + \varepsilon > 0$ et son déterminant est $\det M_2(x, f) + \varepsilon f'(x) + \varepsilon \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \varepsilon^2 \geq \varepsilon^2 > 0$ car $f' \geq 0$ par croissance de f et que $f^{(3)} \geq 0$ par ce qui précède. Ainsi par le critère de Sylvester 2.2.4 : $M_2(x, f) + \varepsilon I_2 > 0$. En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient alors que $M_2(x, f) \geq 0$. \square

Afin de généraliser cette translation à la taille $n > 2$, nous allons introduire une fonction ϕ plus aisée à étudier que les éléments quelconques de $P_n(a, b)$.

Lemme 3.1.1 (Propriétés de ϕ). *Pour $x \in]a; b[$, et $c, d \in]a; b[$ vérifiant $c < x < d$, il existe $\phi :]c; d[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que :*

1. $\phi \in P_\infty(c, d)$
2. $M_n(x, \phi) > 0$

Démonstration. Soit $x, c, d \in]a; b[$ tels que $c < x < d$. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus]c; d[$, on définit

$$\phi_\alpha : y \in]c; d[\mapsto \frac{1}{\alpha - y} \in \mathbb{R}$$

de classe \mathcal{C}^∞ . Par la remarque 2.3.2 traitant des fonctions homographiques, $\phi_\alpha \in P_\infty(c, d)$ comme fonction homographique.

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et notons $z_\alpha = \frac{1}{\alpha - x} \neq 0$ ainsi que $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $Z_\alpha = \begin{pmatrix} z_\alpha \\ z_\alpha^2 \\ \vdots \\ z_\alpha^n \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\phi_\alpha^{(k)}(x) = \frac{k!}{(\alpha - x)^{k+1}} = k! z_\alpha^{k+1}$ de sorte que

$$M_n(x, \phi_\alpha) = (z_\alpha^{i+j})_{ij} = Z_\alpha Z_\alpha^* \geq 0.$$

En effet, $\frac{Z_\alpha Z_\alpha^*}{\sqrt{Z_\alpha^* Z_\alpha}}$ est le projecteur orthogonal sur $\frac{Z_\alpha}{\sqrt{Z_\alpha^* Z_\alpha}}$, donc positif.

Étudions son noyau. La première ligne de $M_n(x, \phi_\alpha)A$ vaut $z_\alpha^2 P_A(z_\alpha)$, où $P_A = a_1 + \dots + a_n X^{n-1} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. En particulier, si $M_n(x, \phi_\alpha)A = 0$, alors z_α est une racine de P_A .

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus]c; d[$ deux à deux distincts. On pose

$$\phi = \sum_{0 \leq i \leq n} \phi_{\alpha_i}.$$

Par somme, $\phi \in P_\infty(c, d)$ et $M_n(x, \phi) \geq 0$.

Si $M_n(x, \phi)A = 0$, alors, en tant que somme de matrices positives, on a

$$\forall i \leq n, M_n(x, \phi_{\alpha_i})A = 0$$

et donc $P_A(z_{\alpha_i}) = 0$. Or, $i \mapsto z_{\alpha_i}$ est injective. Puisque $\deg P_A \leq n - 1$, on a donc $P_A = 0$ et $A = 0$. Ceci prouve que $M_n(x, \phi) > 0$. \square

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour compléter la récurrence et démontrer le théorème 3.3 sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

Preuve du sens direct du premier théorème de Loewner dans le cas f de classe \mathcal{C}^∞ . On procède donc par récurrence sur n . Le cas $n = 2$ vient d'être traité au début de cette partie. On prend donc $n \geq 2$ et on suppose le résultat vrai aux rangs $k \leq n$ afin de le prouver pour $n + 1$. Rappelons toutes les hypothèses faites qui nous seront utiles :

1. $f \in \mathcal{C}^\infty(]a; b[, \mathbb{R})$
2. $f \in P_{n+1}(a, b) \subset P_n(a, b)$
3. $f^{(2n-3)}$ est convexe (Hypothèse de récurrence)
4. $\forall x \in]a; b[, \forall k \leq n, M_k(x, f) \geq 0$ (Hypothèse de récurrence)

On fixe $x \in]a; b[, \varepsilon > 0$ et l'on prend c, d, ϕ comme dans l'énoncé du lemme 3.1.1 au rang $n + 1$. Les propriétés de $P_{n+1}(c, d)$ et ϕ assurent alors que $f + \varepsilon\phi \in P_{n+1}(c, d)$.

En outre, $M_k(x, f + \varepsilon\phi) = M_k(x, f) + \varepsilon M_k(x, \phi) > 0$ pour $k \leq n$ comme somme d'une matrice positive et d'une matrice définie positive. Ainsi, $\det M_k(x, f + \varepsilon\phi) > 0$ pour $k \leq n$ par le critère de Sylvester 2.2.4.

Ce même critère assure qu'il suffit alors que $\det M_{n+1}(x, f + \varepsilon\phi) > 0$ pour que $M_{n+1}(x, f + \varepsilon\phi) = M_{n+1}(x, f) + \varepsilon M_{n+1}(x, \phi) > 0$. Avec ce résultat, on va faire tendre ε vers 0 pour obtenir $M_{n+1}(x, f) \geq 0$.

Montrons donc que $\det M_{n+1}(x, f + \varepsilon\phi) > 0$.

Le théorème 2.5.7 assure que $\det M_{n+1}(x, f + \varepsilon\phi) \geq 0$ car $f + \varepsilon\phi \in P_{n+1}(c, d)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . Or, $\det M_{n+1}(x, f + \varepsilon\phi)$ est polynomial en ε de degré au plus $n + 1$ et de coefficient en ε^{n+1} valant $\det M_{n+1}(x, \phi) > 0$. Alors, pour ε suffisamment petit, on a bien $\det M_{n+1}(x, f + \varepsilon\phi) > 0$ comme voulu et $M_{n+1}(x, f) \geq 0$ à la limite.

La positivité de $M_{n+1}(x, f), x \in]c; d[$ donne la convexité de $f^{(2n-1)}$ sur $]c; d[$ en regardant le dernier coefficient diagonal de la matrice grâce au lemme 2.2.3. Ceci étant valable pour tout sous intervalle ouvert strict de $]a; b[$, cela achève la preuve de l'hérédité et la récurrence. \square

Pour généraliser ces résultats et aboutir à une démonstration complète du théorème 1.2.3, nous introduisons les régularisations de fonctions intégrables.

3.2 RÉGULARISATION

Comme on l'a vu, les hypothèses de régularité faites sur f facilitent grandement les démonstrations. Aussi, la régularisation va nous permettre de se ramener à ce cas dans le cas général. Soit φ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulle en dehors de l'intervalle $] -1; 1[$ et telle que φ soit positive et paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(-x) \geq 0$. On demande de plus que la fonction soit normalisée de manière à ce que :

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = 1.$$

Maintenant, étant donnée une fonction f intégrable sur $]a; b[$, on forme sa régularisation d'ordre $\varepsilon > 0$, qui sera amené à tendre vers 0 :

$$f_\varepsilon : x \in]a + \varepsilon; b - \varepsilon[\mapsto \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy = \int_{-1}^1 \varphi(t) f(x - \varepsilon t) dt \in \mathbb{R}$$

La dernière expression permet de voir que pour $\varepsilon > 0$ et $x \in]a + \varepsilon; b - \varepsilon[$, la valeur de la régularisation $f_\varepsilon(x)$ est une moyenne des valeurs prises par la fonction f dans un voisinage de longueur 2ε du point x .

En conséquence, si $x_0 \in]a; b[$ est un point de continuité de la fonction f , les régularisations $f_\varepsilon(x_0)$ convergent vers $f(x_0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Si la fonction f est continue, le théorème de Heine assure qu'elle est alors uniformément continue sur tout sous-intervalle fermé borné et les régularisations convergent uniformément sur de tels sous-intervalles.

Les résultats de cette sous partie sont des outils usuels d'analyse. On pourra se référer à la section IV.1 de [DoMa] pour les démonstrations.

Lemme 3.2.1. *Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors les régularisations de f sont de classe $C^\infty(]a + \varepsilon, b - \varepsilon[, \mathbb{R})$.*

C'est précisément cette régularité des régularisations qui fait tout leur intérêt et leur nom. Continuons de nous intéresser aux propriétés des régularisations et leur lien avec la dérivation.

Lemme 3.2.2. *Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose de plus que f est dérivable presque partout et que f' est intégrable. Alors la régularisation de f' est la dérivée de la régularisation de f .*

Remarque 3.2.3. *Comme on travaille avec des fonctions convexes, on va manipuler leurs dérivées et dérivées seconde. Ces dérivées sont bien définies par le théorème d'Alexandrov, dont on peut trouver une preuve dans [CoBV] (théorème 2.6.4, p. 86).*

Théorème 3.2.4. *Soit f une fonction monotone définie presque partout sur $]a; b[$ et intégrable. Alors $(f_\varepsilon)'(x)$ converge vers $f'(x)$ en tout point $x \in]a; b[$ où cette dérivée existe et est finie.*

Remarque 3.2.5. *Rappelons qu'une fonction monotone sur un intervalle borné est réglée (c'est-à-dire limite uniforme de fonctions en escalier) puisqu'elle admet des limites à gauche et à droite en tout point où cela fait sens, et est donc en particulier mesurable. Par limite simple sur des intervalles croissants, une fonction monotone est mesurable sur un intervalle quelconque. Si la fonction est bornée, comme dans le cas d'un intervalle fermé bornée, elle est même intégrable.*

En outre, un théorème de Lebesgue assure qu'une fonction monotone sur un intervalle est dérivable presque partout. Ce théorème est démontré dans [AnaWZ] (théorème 7.21, p. 145).

Ce théorème et la régularisation de fonctions générales vont nous permettre de montrer le théorème annoncé par récurrence.

3.3 CAS GÉNÉRAL

Avant d'entamer la récurrence du cas général avec $n = 2$, nous démontrons quelques lemmes techniques permettant d'obtenir de premières conditions de régularité sur les éléments quelconques de $P_2(a, b)$.

Lemme 3.3.1. *Soit $f \in P_2(a, b)$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On a $f_\varepsilon \in P_2(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.*

Démonstration. Soient $A, B \in \mathbb{H}_2(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ telles que $A - B \geq 0$. On a : $f_\varepsilon(A) - f_\varepsilon(B) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)(f(A - \varepsilon z I_2) - f(B - \varepsilon z I_2)) dz \geq 0$ car $\varphi \geq 0$. Cela conclut. \square

Lemme 3.3.2. *Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle toutes les $((f|_I)_\varepsilon)''$, $\varepsilon > 0$, pour $I \subset]a; b[$ intervalle ouvert borné tel que $\bar{I} \subset]a; b[$, soient convexes. Alors $f \in \mathcal{C}^2(]a; b[, \mathbb{R})$ et f'' est convexe.*

Démonstration. On observe qu'il suffit de démontrer le résultat sur tout intervalle $] \alpha; \beta[\subset]a; b[$ avec $a < \alpha < \beta < b$. C'est donc ce qu'on va faire sans préciser que les fonctions sont restreintes à $] \alpha; \beta[$ pour des raisons d'intégrabilité.

Précisons la régularité des fonctions avec lesquelles nous travaillons. Comme f est convexe, elle est dérivable presque partout, de dérivée f' monotone et elle-même dérivable presque partout. La convexité de f donne que f est continue, donc intégrable sur $] \alpha, \beta[$. L'intervalle de travail étant borné, la remarque 3.2.5 assure que f' est intégrable.

Le théorème 3.2.4 appliqué à f' assure alors que $((f'_\varepsilon)'(x))_\varepsilon$ converge vers $f''(x)$ presque partout en $x \in] \alpha; \beta[$.

Le lemme 3.2.2 appliqué à f nous permet d'obtenir que $(f'_\varepsilon)' = (f_\varepsilon)''$, $\varepsilon > 0$ sur $] \alpha; \beta[$. Ainsi, $(f_\varepsilon)''(x) = (f'_\varepsilon)'(x)$ converge bien vers $f''(x)$ presque partout en $x \in] \alpha; \beta[$.

Soient maintenant $\varepsilon > 0$. On prend $c, d \in] \alpha; \beta[$ tels que $c < d$ et $(f_\varepsilon)''(x)$ converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ en $x = c, d$.

On prend de même $h > 0$ suffisamment petit pour que $\alpha < c - h < d + h < \beta$ et $(f_\varepsilon)''(x)$ converge pour $x = c - h, d + h$. $(f_\varepsilon)''$ est convexe donc ses taux d'accroissement sont croissants en la première et en la seconde variable. La valeur absolue de ce taux d'accroissement est donc maximale en l'une des extrémités de l'intervalle fermé sur lequel on se place, ici $[c - h; d + h]$. On a donc pour $x, y \in [c; d]$:

$$\left| \frac{(f_\varepsilon)''(x) - (f_\varepsilon)''(y)}{x - y} \right| \leq \max \left(\frac{|(f_\varepsilon)''(c) - (f_\varepsilon)''(c - h)|}{h}, \frac{|(f_\varepsilon)''(d + h) - (f_\varepsilon)''(d)|}{h} \right)$$

Puisque le terme de droite converge en $\varepsilon \rightarrow 0$, il est borné et la famille $((f_\varepsilon)''_{\varepsilon > 0})$ est uniformément lipschitzienne sur $[c; d]$ compact, donc équicontinue. Elle est aussi uniformément bornée sur $[c; d]$ car cet intervalle est borné, que $((f_\varepsilon)''(c))_\varepsilon$ est bornée, et que les pentes sont uniformément bornées comme on vient de le voir.

Le théorème d'Ascoli s'applique et cette famille admet une sous-suite $((f_{\sigma(k)})''_k)$ qui converge

uniformément sur $[c; d]$ vers une fonction continue que l'on note g . Elle est même convexe comme limite simple de fonctions convexes.

En intégrant la convergence uniforme, il existe G primitive de g telle que $((f_{\sigma(k)})'_k)$ converge uniformément sur $[c; d]$ vers G .

En intégrant à nouveau, et en utilisant le fait que $f_{\sigma(k)}$ converge simplement vers f , on obtient que f est une primitive de G sur $[c; d]$. En particulier, f est deux fois dérivable sur $[c; d]$, de dérivée seconde $f'' = g$ convexe sur cet intervalle.

Ceci étant valable pour presque tout sous intervalle fermé borné de $]a; b[$, on conclut que $f \in \mathcal{C}^2(]a; b[, \mathbb{R})$ et f'' est convexe. □

Nous avons tous les éléments pour la preuve du sens direct du premier théorème de Loewner dans le cas $n = 2$.

Démonstration du sens direct du premier théorème de Loewner dans le cas $n = 2$. Soit $f \in P_2(a, b)$. Nous devons donc montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 , que f' est convexe, et que $M_2(x, f) \geq 0$ pour presque tout $x \in]a; b[$.

Il suffit de le montrer pour tout sous intervalle fermé borné $I = [c; d] \subset]a; b[$. On commence par prouver que f est continue sur I en montrant qu'elle est même lipschitzienne sur cet intervalle. D'après le théorème 2.4.5, on a pour tout quadruplet $a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < b$

$$\det \begin{pmatrix} [\xi_1, \eta_1]_f & [\xi_1, \eta_2]_f \\ [\xi_2, \eta_1]_f & [\xi_2, \eta_2]_f \end{pmatrix} \geq 0.$$

On impose aussi $\xi_1 \in]a; c[$ et $\eta_2 \in]d; b[$ et on va laisser η_1 et ξ_2 décrire I . Soit $M = \max[|f(\xi_1)|, |f(\eta_2)|]$. Alors $0 \leq [\xi_1, \eta_1]_f \leq 2M/(c - \xi_1)$ et $0 \leq [\xi_2, \eta_2]_f \leq 2M/(\eta_2 - d)$. Puis en développant le déterminant précédent,

$$0 \leq [\xi_1, \eta_2]_f [\xi_2, \eta_1]_f \leq \frac{4M^2}{(\eta_2 - d)(c - \xi_1)}.$$

Si $[\xi_1, \eta_2]_f = 0$, alors, la monotonie de $f \in P_2(a, b) \subset P_1(a, b)$ assure qu'elle est constante sur $I \subset [\xi_1; \eta_2]$, donc continue.

Dans le cas contraire, $(\xi_2, \eta_1) \mapsto [\xi_2, \eta_1]_f$ est uniformément bornée sur I^2 , ce qui donne bien que f est lipschitzienne.

Donc f est continue sur $]a; b[$.

On va appliquer le lemme 3.3.2 à F une primitive de f , qui est convexe car de classe \mathcal{C}^1 et $F' = f$ est croissante.

Par le lemme 3.3.1, pour $\varepsilon > 0$, suffisamment petit, $f_\varepsilon \in P_2(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Le sens direct du premier théorème de Loewner dans le cas des fonctions lisses (prouvé au sein de la partie 3.1) pour $J \subset]a; b[$ intervalle ouvert borné tel que $\bar{J} \subset]a; b[$, assure alors que $((F|_J)_\varepsilon)'' = ((f|_J)_\varepsilon)'$ est convexe. Le lemme 3.3.2 donne alors que $f = F'$ est de classe \mathcal{C}^1 et $f' = F''$ est convexe.

Pour finir la preuve il suffit de voir que $M_2(x, f_\varepsilon)$ est une matrice positive convergeant vers $M_2(x, f)$ pour presque tout $x \in]a; b[$. Le caractère positif découle du cas des fonctions lisses déjà prouvé.

Pour la convergence presque partout, on se place sur $]c; d[$ sur lequel f'' est monotone définie

presque partout et intégrable par la remarque 3.2.5.

On sait déjà que $\forall x \in]c; d[, (f_\varepsilon)'(x) = (f')_\varepsilon(x) \rightarrow f'(x)$ par le lemme 3.2.2 appliqué à f .

Le théorème 3.2.4 assure que $((f'')_\varepsilon)'(x) \rightarrow f^{(3)}(x)$ pour presque tout $x \in]c; d[$. Le lemme 3.2.2 appliqué à f' nous permet d'obtenir que $(f'')_\varepsilon = (f'_\varepsilon)', \varepsilon > 0$ sur $]c; d[$. Ainsi, $(f_\varepsilon)^{(3)}(x) = ((f'')_\varepsilon)'(x) \rightarrow f^{(3)}(x)$ pour presque tout $x \in]c; d[$.

En réutilisant des résultats que nous venons d'énoncer : $(f'')_\varepsilon = (f'_\varepsilon)' = (f_\varepsilon)'', \varepsilon > 0$ sur $]c; d[$. Ainsi, coefficient par coefficient, $M_2(x, f_\varepsilon) \rightarrow M_2(x, f)$ pour presque tout $x \in]c; d[$, ce qui conclut car on peut prendre $]c; d[$ arbitrairement grand dans $]a; b[$. \square

Enfin, il ne nous reste que l'hérédité à prouver, en faisant usage des régularisations.

Démonstration du sens direct du premier théorème de Loewner. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 2$ venant d'être traité, on suppose le résultat vrai au rang $n \geq 2$.

Soit $f \in P_{n+1}(a, b) \subset P_n(a, b)$. On commence par établir la régularité de f .

Dans la suite, $\varepsilon > 0$ est amené à tendre vers 0 et, quitte à le diminuer, on supposera qu'il est assez petit.

$f^{(2n-3)}$ est convexe sur par hypothèse de récurrence et si $a < c < d < b$, $f_\varepsilon \in P_{n+1}(c + \varepsilon, d - \varepsilon)$.

Le cas des fonctions lisses assure alors que $((f|_{]c; d[})_\varepsilon^{(2n-3)''}$ est convexe.

Le lemme 3.3.2 permet de conclure que $f^{(2n-3)} \in \mathcal{C}^2(]a; b[, \mathbb{R})$ et que $f^{(2n-1)}$ est convexe.

La convexité de $f^{(2n-1)}$ assure que $M_{n+1}(x, f)$ est définie presque partout en $x \in]a; b[$.

Ensuite, comme dans le cas $n = 2$, les lemmes 3.2.2 et théorème 3.3.2 donnent coefficient par coefficient $M_{n+1}(x, f_\varepsilon) \rightarrow M_{n+1}(x, f)$.

En effet, comme $f \in \mathcal{C}^{2n-1}(]a; b[, \mathbb{R})$, on peut intervertir dérivée et régularisation pour $f^{(i)}$ avec $i \in \llbracket 1; 2n - 2 \rrbracket$ sur un segment contenu dans $]a; b[$.

Les autres termes en $(f_\varepsilon)^{(i)}$ avec $i \in \{2n - 1; 2n - 2; 2n - 3\}$ se traitent comme dans le cas $n = 2$.

Cette matrice est donc positive presque partout comme limite de suite de matrices positives selon le cas des fonctions lisses. D'où le résultat. \square

Nous avons montré le sens direct du premier théorème de Loewner. La partie suivante concerne le sens réciproque.

4

CONDITION SUFFISANTE DE MONOTONIE

L'objectif de cette section est de prouver le sens réciproque du premier théorème de Loewner. Ce théorème offrant immédiatement le caractère local de la monotonie matricielle, il est utile de démontrer ce résultat géométrique afin de démontrer le théorème.

4.1 CARACTÈRE LOCAL

L'objectif de cette section est de démontrer le caractère local de l'appartenance à $P_n(a, b)$. Le théorème suivant l'énonce :

Théorème 4.1.1 (Localité de P_n). *On fixe $a < c < b < d$. Alors $P_n(a, b) \cap P_n(c, d) \subset P_n(a, d)$*

Remarque 4.1.2. *Ce théorème donne bien le caractère local de l'appartenance de f à $P_n(a, b)$. En effet, si pour tout $x \in]a; b[$, on a $a_x < b_x$ tels que $a_x, b_x \in]a; b[$ et $f \in P_n(a_x, b_x)$, alors $f \in P_n(a, b)$.*

Pour le voir, prenons $A \leq B$ des éléments de $\mathbb{H}_n(a, b)$. On peut trouver $c < d$ réels de $]a; b[$ tels que $]c; d[$ contienne leur spectre. Maintenant, $\bigcup_{x \in]a; b[}]a_x; b_x[$ est un recouvrement en ouverts de $]c; d[$ compact. Soit alors $x_1 < \dots < x_k \in]a; b[$ tels que $\bigcup_i]a_{x_i}; b_{x_i}[$ recouvre $]c; d[$.

En itérant un nombre fini de fois le théorème précédent, $\bigcap_i P_n(a_{x_i}, b_{x_i}) \subset P_n(c, d)$. Alors, $f \in P_n(c, d)$ et $f(A) \leq f(B)$. Ceci suffit à prouver que $f \in P_n(a, b)$.

Afin d'aboutir à ce résultat, nous utilisons la description plus géométrique de ces éléments à l'aide des différences divisées qu'offre le théorème ci-dessous. Sur ces objets, le caractère local sera plus aisé à mettre en évidence.

Définition 4.1.3. *Soit $q \in \mathbb{C}_n[X]$. On note $N(q) = qq^* \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ avec q^* le polynôme vérifiant $q^*(z) = \overline{q(\bar{z})}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Théorème 4.1.4. *On a l'équivalence :*

$$f \in P_n(a, b)$$

$$\iff$$

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall q \in \mathbb{C}_{k-1}[X], \forall x_0, x_1, \dots, x_{2k-1} \in]a; b[\text{ deux-à-deux distincts,}$$

$$[x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}]_{fN(q)} \geq 0$$

Mais pour s'y ramener, il nous faut un lien avec la positivité des matrices images par f , que nous donne le lemme suivant.

Lemme 4.1.5. (i) Si (A, B, v) est une paire projective stricte de taille n et $w \in \mathbb{C}^n$, alors il existe $a < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{2n-1} < b$ et $q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que :

$$\forall f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}, \langle w, (f(B) - f(A))w \rangle = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{fN(q)}$$

(ii) Si $a < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{2n-1} < b$ et $q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, alors il existe (A, B, v) paire projective stricte de taille n et $w \in \mathbb{C}^n$ tels que :

$$\forall f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}, \langle w, (f(B) - f(A))w \rangle = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{fN(q)}$$

Démonstration. On va d'abord démontrer le cas (i). On prend $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ interpolation polynomiale de f en $\lambda_n(A) < \lambda_n(B) < \lambda_{n-1}(A) < \lambda_{n-1}(B) < \dots < \lambda_1(A) < \lambda_1(B)$ les valeurs propres entrelacées de A et B selon le lemme 2.5.2.

On pose $q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour $z \in \mathbb{C}$,

$$q(z) = \det(zI - A) \langle w, (zI - A)^{-1}v \rangle.$$

On vérifie que cette expression est bien polynomiale en z de degré au plus $n - 1$. Prenons $(e_j)_j$ une base propre orthonormale pour A et notons pour $1 \leq j \leq n$ et z complexe $p_j(z) = \langle e_j, v \rangle \prod_{i \neq j} (z - \lambda_i(A))$ polynôme de degré $n - 1$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $q(z) = \det(zI - A) \sum_j \langle e_j, (zI - A)^{-1}v \rangle \langle w, e_j \rangle$.

Or, pour $1 \leq j \leq n$ et z un complexe différent des $\lambda_i(A)$,

$$\begin{aligned} \langle e_j, (zI - A)^{-1}v \rangle &= \langle ((zI - A)^{-1})^* e_j, v \rangle = \langle (\bar{z}I - A)^{-1} e_j, v \rangle = \langle \left(\frac{1}{\bar{z} - \lambda_j(A)} e_j, v \right) \\ &= \frac{1}{z - \lambda_j(A)} \langle e_j, v \rangle = \det(zI - A)^{-1} p_j(z). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $q = \sum_{1 \leq j \leq n} \langle w, e_j \rangle p_j \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Comme la paire projective est stricte, on a $\forall 1 \leq j \leq n$, $\langle e_j, v \rangle \neq 0$. La famille $(p_j)_j$ est une base (par interpolation de Lagrange) de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Maintenant,

$$[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{fN(q)} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{gN(q)}$$

car les λ_i sont distincts deux-à-deux. Puis, le long d'un chemin γ entourant les λ_i , par le lemme 2.4.10,

$$[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{gN(q)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\det(zI - A) \det(zI - B)} N(q)(z) g(z) dz.$$

Or, grâce au lemme 2.5.4 pour la seconde égalité,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(zI - A) \det(zI - B)} N(q)(z) &= \frac{\det(zI - A)}{\det(zI - B)} \langle w, (zI - A)^{-1}v \rangle \langle v, (zI - A)^{-1}w \rangle \\ &= \langle w, (zI - B)^{-1}v \rangle \langle v, (zI - A)^{-1}w \rangle = w^*(zI - B)^{-1}v v^*(zI - A)^{-1}w. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $vv^* = B - A = (zI - A) - (zI - B)$ et en injectant dans l'intégrale :

$$[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{gN(q)} = \langle w, \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} ((zI - B)^{-1} - (zI - A)^{-1})g(z)dz \right) w \rangle.$$

Mais puisque g est polynomiale, avec la formule de Cauchy, on obtient donc finalement :

$$[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{fN(q)} = \langle w, (g(B) - g(A))w \rangle = \langle w, (f(B) - f(A))w \rangle.$$

Puisque q ne dépend pas de f , cela démontre le premier point.

Pour montrer le deuxième point, on utilise le fait que, grâce au lemme 2.5.2, en faisant varier (A, B, v) sur toutes les paires projectives strictes de taille n , tous les $2n$ -uplets distincts de $]a; b[$ sont atteints. Il suffit alors de voir que :

$$\Phi_{(A,B,v)} : w \in \mathbb{C}^n \mapsto (z \in \mathbb{C} \mapsto \det(zI - A)\langle w, (zI - A)^{-1}v \rangle) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$$

est une bijection antilinéaire. La surjectivité provient de ce que $(p_j)_j$ forme une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et pour $1 \leq j \leq n$, $\Phi_{(A,B,v)}(e_j) = p_j$. L'égalité des dimensions conclut.

En effet, dans le contexte donné par le deuxième point, on prend (A, B, v) stricte de taille n telle que pour $1 \leq i \leq n$, $\lambda_{2i} = \lambda_{n-i}(A)$, $\lambda_{2i+1} = \lambda_{n-i}(B)$ par le lemme 2.5.2. Avec $w = \Phi_{(A,B,v)}^{-1}(q) \in \mathbb{C}^n$, on a bien avec ce qui précède que

$$\forall f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}, \langle w, (f(B) - f(A))w \rangle = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}]_{fN(q)}.$$

□

Nous pouvons désormais démontrer le théorème 4.1.4.

Démonstration. Démonstration du théorème 4.1.4 Pour le sens direct, si $f \in P_n(a, b)$ et $1 \leq k \leq n$, $f \in P_k(a, b)$ et l'on prend $q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$, $x_0 < x_1 < \dots < x_{2k-1} \in]a; b[$. Le deuxième cas du lemme 4.1.5 donne (A, B, v) stricte de taille k et $w \in \mathbb{C}^n$ tels que $0 \leq \langle w, (f(B) - f(A))w \rangle = [x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}]_{fN(q)}$ puisque $A \leq B$.

Pour le sens réciproque, afin de montrer la monotonie de f , on observe d'abord le cas favorable où l'on prend $A \leq B$ de taille $k \leq n$ de sorte qu'il existe $v \in \mathbb{C}^k$ tel que (A, B, v) soit stricte. Le premier cas du lemme 4.1.5 donne que pour $w \in \mathbb{C}^k$, il existe $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{2k-1} < b$ et $q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$ tels que : $\langle w, (f(B) - f(A))w \rangle = [x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}]_{fN(q)} \geq 0$. Cela donne bien $f(B) \geq f(A)$.

Dans le cas général, on procède par récurrence sur $n \geq 1$. L'initialisation est triviale car l'appartenance à $P_1(a, b)$ code la croissance. On fixe donc $n \geq 1$ et on suppose le résultat vérifié pour n . On prend $A \leq B$ de taille $n + 1$ et l'on écrit $B - A = \sum_{1 \leq i \leq n+1} c_i P_{v_i}$, pour des c_i positifs et $v_i \in \mathbb{C}^{n+1}$ libres, où P_{v_i} désigne la projection orthogonale sur v_i par le point (iv) de la proposition 2.2.1.

Avec, pour $0 \leq k \leq n + 1$, $A_k = A + \sum_{1 \leq i \leq k} c_i P_{v_i}$, on a

$$f(B) - f(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} (f(A_{k+1}) - f(A_k)).$$

Il suffit donc de montrer que $f(A_{k+1}) - f(A_k) \geq 0, 0 \leq k \leq n$. On suppose donc que $c_1 = c, v_1 = v, c_2 = c_3 = \dots = c_{n+1} = 0$.

Si (A, B, v) est stricte, c'est terminé par la discussion précédente. Dans le cas contraire, il existe $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ vecteur propre de A pour une valeur propre λ qui soit orthogonal à v . Alors, w est vecteur propre de B pour λ et A et B se décomposent en $A = \lambda I_{\text{Vect}(w)} \oplus A_{\text{Vect}(w)^\perp}$, $B = \lambda I_{\text{Vect}(w)} \oplus B_{\text{Vect}(w)^\perp}$ en tant qu'endomorphismes de \mathbb{C}^{n+1} .

De plus, $A_{\text{Vect}(w)^\perp} \leq B_{\text{Vect}(w)^\perp}$. Par hypothèse de récurrence avec $k = n$, on a $f \in P_n(a, b)$ et donc $f(B_{\text{Vect}(w)^\perp}) \geq f(A_{\text{Vect}(w)^\perp})$. Alors, on a $f(B) \geq f(A)$.

Ceci conclut que $f \in P_{n+1}(a, b)$ et termine la récurrence. \square

Enfin, il ne reste plus qu'à montrer que la propriété géométrique d'intérêt est elle-même locale pour conclure.

Démonstration. Démonstration du théorème 4.1.1 Pour $1 \leq k \leq n$, si $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{2k-1} < d$, on dira que $x = (x_0, x_1, \dots, x_{2k-1})$ est bonne si $x_{2k-1} < b$ ou $x_0 > c$. On note $\mu_x = \{i, x_i \in]c; b[\} \subset \llbracket 0; 2k \rrbracket$. En particulier, si $|\mu_x| = 2k$ alors x est bonne. On va utiliser un argument de descente infinie sur le cardinal de μ_x pour conclure que l'on peut modifier une configuration pour qu'elle soit combinaison convexe de configurations dites bonnes.

On considère $g :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x = (x_0, x_1, \dots, x_{2k-1})$ qui n'est pas bonne et l'on fixe $y \in]c; b[\setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}\}$. En sommant les deux identités suivantes sur les différences divisées :

$$\begin{aligned} (y - x_0)[x_0, x_1, \dots, x_{2k-2}, y]_g &= [x_1, x_2, \dots, x_{2k-2}, y]_g - [x_0, x_1, \dots, x_{2k-2}]_g \\ (x_{2k-1} - y)[x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, y]_g &= -[x_1, x_2, \dots, x_{2k-2}, y]_g + [x_1, x_1, \dots, x_{2k-1}]_g \end{aligned}$$

On obtient :

$$[x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}]_g - [x_0, x_1, \dots, x_{2k-2}]_g$$

qui vaut aussi :

$$(x_{2k-1} - x_0)[x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}]_g.$$

Avec $\alpha = \frac{y-x_0}{x_{2k-1}-x_0}$, $\beta = \frac{x_{2k-1}-y}{x_{2k-1}-x_0}$, on a $\alpha, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$. Cela prouve que $[x]_g = [x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}]_g$ est dans l'enveloppe convexe de $\{[x_0, x_1, \dots, x_{2k-2}, y]_g; [x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, y]_g\}$. Or, en notant $x' = (x_0, x_1, \dots, y, \dots, x_{2k-2})$, $x'' = (x_1, x_2, \dots, y, \dots, x_{2k-1})$, on a, en utilisant que x n'est pas bonne (i.e. que $x_0 \leq c < b \leq x_{2k-1}$), que $y \in \mu_{x'}$ (alors que $x_{2k-1} \notin \mu_x$) et $y \in \mu_{x''}$ (alors que $x_0 \notin \mu_x$). D'où

$$\mu_{x''} = \mu_{x'} = \mu_x + 1$$

puisque les autres éléments sont inchangés, et x', x'' sont encore des $2k$ -uplets.

Ainsi, en itérant le procédé, qui est compatible avec la structure de cône convexe, on obtient qu'en un nombre fini d'étapes, $[x]_g$ s'exprime comme combinaison convexe de configurations dites bonnes.

Or, dans le cas où $f \in P_n(a, b) \cap P_n(c, d) \subset P_k(a, b) \cap P_k(c, d)$, $q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$, on a que $[\cdot]_{fN(q)}$ est positive sur ces configurations dites bonnes par le théorème 4.1.4. On a alors $[x]_{fN(q)} \geq 0$

par linéarité de $[\cdot]_{fN(q)}$ sur $]a; b[^{2k}$. C'est aussi le cas pour une configuration dite bonne par application directe du théorème 4.1.4.

L'ordre des points dans une différence divisée n'important pas, on a alors, grâce au théorème 4.1.4, $f \in P_n(a, d)$. \square

4.2 PREUVE DU SENS RÉCIPROQUE

Nous allons démontrer la réciproque du premier théorème de Loewner 1.2.3. Comme pour le sens direct, nous supposons d'abord que la fonction est de classe \mathcal{C}^∞ , puis nous montrons que nous pouvons nous ramener à ce cas.

Lemme 4.2.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]a; b[, \mathbb{R})$ telle que $f^{(2n-3)}$ est convexe. On suppose $M_n(x, f) \geq 0$ pour presque tout $x \in]a; b[$. Alors $f \in P_n(a, b)$.*

Démonstration. Notons d'abord qu'étant donné que f est de classe \mathcal{C}^∞ , l'application, $x \mapsto M_n(x, f)$ est continue. Le fait que \mathbb{H}_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ assure que cette matrice est positive sur tout $]a; b[$.

Ramenons nous au cas où $M_n(x, f) > 0$ pour $x \in]a; b[$. Pour cela, on pose $g_\alpha = f + \alpha\phi$, où ϕ est la fonction introduite dans le lemme 3.1.1 pour n et $\varepsilon > 0$ qui sera amené à tendre vers 0. On a alors

$$\forall x \in]a; b[, M_n(x, g_\alpha) = M_n(x, f) + \alpha M_n(x, \phi)$$

Par construction, $M_n(x, \phi) > 0$ pour $x \in]a; b[$. On a donc

$$\forall x \in]a; b[, M_n(x, g_\alpha) > 0$$

On a toujours la convergence simple $g_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} f$. Étant donné que $P_n(a, b)$ est fermé pour la convergence simple, il suffit donc de montrer que $g_\alpha \in P_n(a, b)$. Pour alléger les notations, on note désormais $g = g_\alpha$.

Soit $x_0 \in]a; b[$. Montrons qu'il existe $h > 0$ tel que $g \in P_n(x_0 - h, x_0 + h)$. Procédons par l'absurde. Supposons que pour tout $h > 0$, $g \notin P_n(x_0 - h, x_0 + h)$.

Par le théorème 2.5.5, pour tout $h \in]0; 1[$, il existe $m_h \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $x_0 - h < \xi_1^{(h)} < \eta_1^{(h)} < \dots < \xi_{m_h}^{(h)} < \eta_{m_h}^{(h)} < x_0 + h$ tels que le déterminant de la matrice de Loewner généralisée $\det([\xi_i^{(h)}, \eta_j^{(h)}]_g)_{1 \leq i, j \leq m_h}$ soit strictement négatif.

Les m_h ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs, il existe une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 telle que $(m_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est constante. On note alors m cette valeur constante et $(\eta_i^{(k)})_{1 \leq i \leq m}$, $(\xi_i^{(k)})_{1 \leq i \leq m}$ les m -uplets associés à h_k , $k \in \llbracket 1; +\infty \rrbracket$. Par le théorème 2.5.6, le déterminant de Loewner étendu $\det L^e$ est alors aussi strictement négatif :

$$\det L_k^e = \begin{vmatrix} [\xi_1^{(k)}, \eta_1^{(k)}]_g & \cdots & [\xi_1^{(k)}, \eta_1^{(k)}, \dots, \eta_m^{(k)}]_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_m^{(k)}, \eta_1^{(k)}]_g & \cdots & [\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_m^{(k)}, \eta_1^{(k)}, \dots, \eta_m^{(k)}]_g \end{vmatrix} < 0$$

La fonction g étant de classe \mathcal{C}^∞ , on sait, par la propriété 2.4.8, que pour $1 \leq i, j \leq m$, il existe des $\alpha_{i,j}^{(k)} \in]x_0 - h_k; x_0 + h_k[$ tels que

$$\det L_k^e = \det \left(\frac{1}{(i+j-1)!} g^{(i+j-1)}(\alpha_{i,j}^{(k)}) \right)_{i,j} < 0$$

Quand $k \rightarrow +\infty$, $h_k \rightarrow 0$, on a alors $\alpha_{i,j}^{(k)} \rightarrow x_0$ pour tout i, j . Par continuité des dérivées de g (qui est \mathcal{C}^∞), on a donc

$$\det L_k^e \xrightarrow{h_k \rightarrow 0} \det \left(\frac{1}{(i+j-1)!} g^{(i+j-1)}(x_0) \right) = \det M_m(x_0, g)$$

La fonction g vérifiant pour tout $x \in]a; b[$, $M_n(x, g) > 0$, le Critère de Sylvester 2.2.4 assure que les mineurs principaux sont strictement positifs. En particulier,

$$\det M_m(x_0, g) > 0.$$

Or, on a

$$\det M_m(x_0, g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det L_k^e \leq 0$$

C'est absurde et ainsi,

$$\forall x \in]a + \varepsilon; b - \varepsilon[, \exists h > 0, g \in P_n(x - h, x + h)$$

Le théorème 4.1.1 et la remarque 4.1.2 qui le suit assurent alors que, $g \in P_n(a, b)$. On a donc finalement bien prouvé le lemme. □

Lemme 4.2.2. Soit $f \in \mathcal{C}^{2n-3}(]a; b[, \mathbb{R})$ intégrable telle que $f^{(2n-3)}$ soit convexe et telle que $M_n(x, f) \geq 0$ pour presque tout $x \in]a; b[$. Alors, les régularisations f_ε pour $\varepsilon > 0$ (introduites à la section 3.2) vérifient les mêmes propriétés sur $]a + \varepsilon; b - \varepsilon[$.

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, par le lemme 3.2.1, f étant supposé intégrable, f_ε est de classe \mathcal{C}^∞ sur chaque sous-intervalle compact de $]a + \varepsilon; b - \varepsilon[$ (car une fonction continue sur un compact est intégrable). Par le lemme 3.2.2, pour $x \in]a + \varepsilon; b - \varepsilon[$, $(f_\varepsilon)^{(2n-3)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) f^{(2n-3)}(x - z\varepsilon) dz$. C'est une intégrale à poids positif de fonctions convexes, on a donc $(f_\varepsilon)^{(2n-3)}$ convexe. Il reste à prouver que $M_n(x, f_\varepsilon) \geq 0$ presque partout.

Soit alors $x \in]a, b[$. La propriété que l'on cherche à montrer est local (elle ne concerne que la valeur des fonctions au point x). On restreint dès lors toute nos fonctions à un segment $[c, d] \subset]a, b[$ contenant x .

Par le théorème d'Alexandrov ([CoBV], théorème 2.6.4, p. 86), $f^{(2n-3)}$ est dérivable presque partout et $f^{(2n-2)}$ est croissante.

Par le théorème de décomposition de Lebesgue (démontré dans [DuCo], section 8, p. 169), il existe des fonctions m et S définies sur $[c, d]$, croissantes, respectivement absolument continue et singulière telles que pour presque tout $x \in]a; b[$, $f^{(2n-2)}(x) = m(x) + S(x)$ et telles que $m, S \geq 0$. On rappelle que :

- m est absolument continue sur $[c, d]$ s'il existe g Lebesgue-intégrable telle que pour $x \in [c, d]$, $m(x) - m(c) = \int_c^x g$ (en particulier m est dérivable de dérivée continue presque partout, et donc de dérivée intégrable étant donné que l'on est sur un compact).
- S est singulière si S est continue et non constante sur $[c; d]$, dérivable presque partout et de dérivée nulle presque partout (donc continue presque partout).

On a alors, pour presque tout $x \in [c, d]$:

$$f^{(2n-1)}(x) = m'(x).$$

Les fonctions f et m sont intégrables. Par différence, S est intégrable. Ainsi, pour presque tout $x \in]a + \varepsilon; b - \varepsilon[$:

$$(f_\varepsilon)^{(2n-2)}(x) = \int_{]c+\varepsilon; d-\varepsilon[} \varphi(z) f^{(2n-2)}(x - z\varepsilon) dz = m_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(x)$$

$$(f_\varepsilon)^{(2n-1)}(x) = (m_\varepsilon)'(x) + (S_\varepsilon)'(x)$$

Par continuité de $(f_\varepsilon)^{(2n-2)}$ et $(f_\varepsilon)^{(2n-1)}$, les égalités précédentes sont en fait vérifiées partout sur $]c + \varepsilon, d - \varepsilon[$. On a donc :

$$M_n(x, f_\varepsilon) = \left(\begin{array}{cc|c} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{(2n-2)!} [m_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(x)] \\ \vdots & \frac{1}{(2n-2)!} [m_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(x)] & \frac{1}{(2n-1)!} [(m_\varepsilon)'(x) + (S_\varepsilon)'(x)] \end{array} \right)$$

À part le terme en bas à droite, on reconnaît les termes de la régularisée de la matrice $M_n(x, f_\varepsilon)$:

$$M_n(x, f)_\varepsilon = \left(\begin{array}{cc|c} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{(2n-2)!} [m_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(x)] \\ \vdots & \frac{1}{(2n-2)!} [m_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(x)] & \frac{1}{(2n-1)!} (m')_\varepsilon(x) \end{array} \right)$$

Or, m' étant intégrable, $(m')_\varepsilon(x) = (m_\varepsilon)'(x)$ par le lemme 3.2.2 et donc :

$$M_n(x, f_\varepsilon) = M_n(x, f)_\varepsilon + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} (S_\varepsilon)'(x) \end{array} \right)$$

Comme $M_n(x, f)_\varepsilon$ est une intégrale à poids positifs de $M_n(x, f)$ qui est une matrice positive presque partout, $M_n(x, f)_\varepsilon$ est positive presque partout. Aussi,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} (S_\varepsilon)'(x) \end{array} \right) = \frac{1}{(2n-1)!} (S_\varepsilon)'(x) E_{n,n}$$

est positive car (S_ε) étant croissante, $(S_\varepsilon)' \geq 0$. Ainsi, par somme, $M_n(x, f_\varepsilon)$ est une matrice positive presque partout.

□

Nous pouvons maintenant montrer la réciproque du premier théorème de Loewner

Démonstration du sens réciproque du théorème 1.2.3. Soit $c < d$ des réels (différents de $\pm\infty$) tels que $a < c < d < b$. La fonction f est continue sur le compact $[c, d]$ donc intégrable, et dès lors intégrable sur tout interval ouvert $]a', b'[,$ contenu dans $[c, d]$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $]a', b'[\subset]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$. Ainsi le lemme 4.2.2 nous assure que l'on peut appliquer le lemme 4.2.1 pour obtenir que (pour ε suffisamment petit) les f_ε sont dans $P_n(a', b')$. Par fermeture par convergence simple de cet ensemble, on a $f \in P_n(a', b')$. comme $c < d$ sont quelconques dans $]a, b[,$ on a $f \in P_n(a, b)$. □

5

DEUXIÈME THÉORÈME DE LOEWNER

Cette section finale a pour but de démontrer le deuxième théorème de Loewner à partir du premier.

Par la suite, on note le disque unitaire $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et \mathcal{S}^1 le cercle unité.

5.1 REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS DE PICK

On va définir les fonctions de Pick et donner quelques unes de leurs propriétés. On va ensuite donner la représentation intégrale des fonctions de Pick qui est centrale dans la démonstration.

Définition 5.1.1. On appelle fonction de Pick une fonction $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que φ est analytique sur le demi-plan complexe supérieur strict \mathcal{H}_+ et $\varphi(\mathcal{H}_+) \subset \overline{\mathcal{H}_+}$. On note P l'ensemble des fonctions de Pick. On dit que φ est non triviale si $\varphi(\mathcal{H}_+) \subset \mathcal{H}_+$, et triviale sinon (cette terminologie est justifiée par la proposition 5.1.2). On note enfin P^\times l'ensemble des fonctions de Pick non triviale.

Proposition 5.1.2. On a les propriétés suivantes :

- (i) P est un cône convexe : pour $\alpha, \beta > 0$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in P$ on a $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in P$.
- (ii) P^\times est stable par composition.
- (iii) les fonctions de Pick triviales sont constantes réelles.

Démonstration. Pour $\varphi, \psi \in P$, $\alpha, \beta > 0$, $z \in \mathcal{H}$, on a

$$\text{Im}(\alpha\varphi(z) + \beta\psi(z)) = \alpha\text{Im}(\varphi(z)) + \beta\text{Im}(\psi(z)) \geq 0.$$

Ce qui montre que P est un cône convexe.

Pour $\varphi, \psi \in P^\times$, on a

$$\varphi \circ \psi(\mathcal{H}_+) \subset \varphi(\mathcal{H}_+) \subset \mathcal{H}_+.$$

Pour montrer le troisième point, on prend $\varphi = U + iV \in P$ où U et V sont harmoniques sur \mathcal{H}_+ .

Par construction, $V \geq 0$ sur \mathcal{H}_+ . S'il existe $z \in \mathcal{H}_+$, tel que $V(z) = 0$ par la propriété de la moyenne, on en déduit que V est identiquement nulle. A l'aide des équations de Cauchy-Riemann, on voit que U est une constante réelle, c'est à dire que φ est une constante réelle. \square

Remarque 5.1.3. Il est important de noter que $z \mapsto 1/(\lambda - z)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ est une fonction de Pick. Par la proposition 5.1.2, on obtient que

$$\varphi : z \mapsto \alpha z + \beta + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\lambda_i - z},$$

est une fonction de Pick, où $\alpha, m_i > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. De plus, $z \mapsto z^\gamma$ pour $\gamma \in]0; 1[$, la fonction tangente et la détermination principale du logarithme sont aussi des fonctions de Pick.

Remarque 5.1.4 (Généralisation intégrale). *On peut généraliser la stabilité par sommation à une stabilité par intégration. Si f est une fonction définie sur (Λ, \mathcal{H}) où Λ est un espace mesurable, telle que $z \mapsto f(\lambda, z)$ est dans P pour tout $\lambda \in \Lambda$. On a que*

$$z \mapsto \int_{\Lambda} f(\lambda, z) d\mu(\lambda)$$

est une fonction de Pick, où μ est une mesure positive sur Λ telle qu'il existe une fonction positive $\phi \in L^1(\Lambda, \mu)$ qui domine $\lambda \mapsto f(\lambda, z)$ pour presque tout $\lambda \in \Lambda$.

On voit facilement que la fonction ϕ nous donne une fonction de domination, et par le théorème de convergence dominée, on peut inverser dérivée et intégrale et obtenir que c'est une fonction analytique complexe. En plus, pour $z \in \mathcal{H}_+$, on a $\text{Im } f(\lambda, z) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ainsi, en prenant l'intégrale, la partie imaginaire reste encore positive.

Définition 5.1.5. *On note $P(a, b)$ le sous-ensemble de P dont les éléments admettent un prolongement analytique vers le demi-plan inférieur en passant par l'intervalle $]a; b[$ par réflexion de Schwarz.*

On rappelle que le prolongement au demi-plan inférieur par réflexion de Schwarz est donné par la formule $\varphi(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ pour tous les points $z \in \mathcal{H}_-$. Ainsi, une fonction $\varphi \in P$ est dans la classe $P(a, b)$ si, et seulement si, il existe ψ définie sur $\mathcal{H}_+ \cup]a; b[\cup \mathcal{H}_-$ satisfaisant $\overline{\psi(z)} = \psi(\bar{z})$ pour tout $z \in \mathcal{H}_+$ et $\psi|_{\mathcal{H}_+} = \varphi$. Dans ce cas, on fera l'amalgame entre φ et ψ .

Proposition 5.1.6. *On a les propriétés suivantes :*

- la classe $P(a, b)$ est un cône.
- une fonction de $P(a, b)$ non-triviale ne prend des valeurs réelles que sur l'axe réel.
- une fonction de $P(a, b)$ est monotone et croissante sur l'axe réel.

Démonstration. Les deux premiers points sont des corollaires directs de la proposition 5.1.2. On réécrit $\varphi \in P$ comme $U + iV$ où U et V sont harmoniques réelles. On a que V est nulle sur l'intervalle $]a; b[$ et ainsi $V(x + iy) - V(x) \geq 0$ pour tout $y > 0$ et $x \in]a; b[$. En passant à la limite, on a $\forall x \in]a; b[, \partial_y V(x) \geq 0$. Par les équations de Cauchy-Riemann, on a $\partial_x U = \partial_y V \geq 0$ sur $]a; b[$, et donc que U est croissante sur $]a; b[$. \square

Nous démontrons maintenant un théorème permettant de caractériser la classe P à partir d'une formule intégrale. Ce théorème va nous être utile pour la réciproque du deuxième théorème de Loewner.

Théorème 5.1.7. *Soit $\varphi \in P$, il existe une unique représentation intégrale de φ de la forme*

$$z \mapsto \alpha z + \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda)$$

où $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et μ est une mesure positive borélienne sur l'axe réel telle que la fonction $\lambda \mapsto 1/(1 + \lambda^2)$ est dans $L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Réciproquement, une fonction de cette forme est de Pick.

On fixe d'abord la notation $V = \text{Im}\varphi$ où φ est analytique sur \mathcal{H}_+ dans P . V est une fonction harmonique positive sur le demi-plan \mathcal{H}_+ . Le théorème suivant, dû à Prokhorov, sera utile pendant la preuve.

Théorème 5.1.8 (Prokhorov). *Sur un espace topologique compact métrisable, une suite de mesures boréliennes dont ses variations totales sont uniformément bornée possède une sous-suite convergent faiblement.*

Remarque 5.1.9. *Par la suite, on va utiliser ce théorème seulement pour des mesures sur \mathcal{S}^1 qui est compact comme un sous-ensemble fermé et borné, et métrisable en prenant la distance entre deux points la longueur de l'arc qui les relie. En plus, pour des mesures positives, la variation totale est exactement la masse totale, c'est à dire qu'il suffit de dominer ses masses totales dans ce cas.*

On peut trouver une preuve de ce théorème dans [CPM] (théorème 5.1, p. 59).

Démonstration. On procède par double implication.

\Rightarrow Montrons d'abord qu'une fonction φ admettant une telle représentation intégrale est de Pick. Par la proposition 5.1.6, il suffit de montrer que le terme linéaire et le terme intégral sont dans P . C'est clair pour le terme linéaire.

Étudions le terme intégral. L'intégrande est bien dans P par la remarque 5.1.4. Montrons que l'intégrande peut être dominée par une constante sur tout compact contenu dans \mathcal{H}_+ . Fixons K un compact arbitraire contenu dans \mathcal{H}_+ . L'intégrande s'écrit :

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda z + 1}{\lambda - z} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + 1} = \left(z + \frac{z^2 + 1}{\lambda - z} \right) \cdot \frac{1}{\lambda^2 + 1}.$$

Ainsi, en posant $M = \sup_{z \in K} |z|$ et $m = \inf_{z \in K} \text{Im}(z)$, on a $0 < m, M < +\infty$ par compacité de K . En posant alors $g : \lambda \mapsto \left(M + \frac{M^2 + 1}{m} \right) \cdot \frac{1}{\lambda^2 + 1}$ qui est intégrable par rapport à la mesure μ , on obtient une domination de l'intégrande.

Ainsi, en appliquant le théorème de convergence dominé, on a montré que φ est une fonction analytique complexe sur K de partie imaginaire positive. K ayant été choisi arbitrairement dans \mathcal{H}_+ , on obtient que φ est de Pick.

\Leftarrow Soit $\varphi \in P$. On montre d'abord l'existence puis l'unicité de la représentation intégrale de φ .

Existence Étant donné la représentation que l'on souhaite obtenir, on est amené à poser, pour $z = \xi + i\eta$:

$$\begin{aligned} V(z) = V(\xi, \eta) &:= \text{Im} \left(\alpha(\xi + i\eta) + \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - (\xi + i\eta)} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda) \right) \\ &= \alpha\eta + \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta d\mu(\lambda)}{(\lambda - \xi)^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer qu'une fonction harmonique positive sur \mathcal{H}_+ admet une telle représentation intégrale.

En effet, supposons que cela soit le cas. Pour $\varphi \in P$ sa partie imaginaire V admet alors une telle représentation intégrale avec les mêmes notations. On pose alors $\tilde{\varphi}(z) = \alpha z + \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda)$ avec $\beta = \text{Re}(\varphi(i))$.

Cette fonction est bien de Pick et, par le calcul précédent, a la même partie imaginaire que φ . Or deux fonctions analytiques de même partie imaginaire diffèrent d'une constante réelle. Par construction de β , on a en fait $\tilde{\varphi} = \varphi$. On peut donc reconstruire φ à partir de V et obtenir sa représentation intégrale.

Pour obtenir le résultat sur V , on va transformer V comme une fonction harmonique positive sur le disque unitaire \mathcal{D} . En notant $z \in \mathcal{D}$ et $w \in \mathcal{H}_+$, on se donne une transformation homographique entre \mathcal{D} et \mathcal{H}_+

$$w : z \mapsto \frac{1}{i} \frac{z + 1}{z - 1} \text{ et } z : w \mapsto \frac{w - i}{w + i}.$$

On pose $u : z \mapsto u(z) := V(w(z))$ et on veut montrer que c'est bien une fonction harmonique positive sur \mathcal{D} . Il suffit de mentionner que $u(z) = \text{Im}(\varphi(w(z)))$ par définition de V . Comme $z \mapsto \varphi(w(z))$ est une composition de deux fonctions holomorphes, elle est donc une fonction holomorphe, d'où u est harmonique comme la partie imaginaire d'une fonction holomorphe. De plus u est positive car V l'est.

On veut maintenant trouver une représentation intégrale pour u puis en déduire celle de V . On considère ici un automorphisme de \mathcal{D} donné par

$$\psi_s(z) = \frac{z - s}{1 - \bar{s}z},$$

où $s \in \mathcal{D}$ et on voit facilement que $\psi_s(s) = 0$. On peut donc définir $u_\varepsilon(z) = u\left(\frac{\psi_s^{-1}(z)}{1 + \varepsilon}\right)$ de sorte que $u_\varepsilon(0) = u\left(\frac{s}{1 + \varepsilon}\right)$ et elle est bien définie sur le disque $\mathcal{D}_{1 + \varepsilon}$ contenant $\bar{\mathcal{D}}$. Par la propriété de la moyenne, on peut voir que

$$u_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\varepsilon(\exp(i\tau)) d\tau.$$

De plus, si l'on prend $z \in \mathcal{S}^1$ alors $|1 - \bar{s}z| = |z||\bar{z} - \bar{s}| = |z - s|$, i.e. $\psi_s(z) \in \mathcal{S}^1$. En posant $\exp(i\phi) = \psi_s^{-1}(\exp(i\tau))$, on calcule ce changement de variable comme suit :

$$\frac{d\tau}{d\phi} = \frac{1}{i \exp(i\tau)} \frac{d\psi_s(\exp(i\phi))}{d\phi} = \frac{1 - |s|^2}{|\exp(i\phi) - s|^2}.$$

Avec le fait que $u_\varepsilon(\exp(i\tau)) = u\left(\frac{\exp(i\phi)}{1 + \varepsilon}\right)$, on en déduit que

$$u\left(\frac{s}{1 + \varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |s|^2}{|\exp(i\phi) - s|^2} u\left(\frac{\exp(i\phi)}{1 + \varepsilon}\right) d\phi.$$

En réécrivant $s = r \exp(i\theta)$, on peut obtenir que

$$u\left(\frac{r \exp(i\theta)}{1 + \varepsilon}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \phi)} \cdot \underbrace{\frac{u\left(\frac{\exp(i\phi)}{1 + \varepsilon}\right)}{2\pi}}_{:=d\omega_\varepsilon(\phi)} d\phi,$$

où ω_ε est positive car u l'est, et la masse totale de ω_ε est $u(0)$ indépendante de ε . Vu que $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une suite de mesures positives définies sur l'intervalle compact $[0, 2\pi]$ dont la variation totale (la masse totale dans le cas positif) est uniformément bornée, on peut maintenant appliquer la proposition 5.1.8 et conclure qu'il existe une suite ε_n vers 0 telle que (ω_{ε_n}) converge vers une certaine mesure ω faiblement. En résumé, on a

$$\begin{aligned} u(r \exp(i\theta)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u\left(\frac{r \exp(i\theta)}{1 + \varepsilon_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \phi)} d\omega_{\varepsilon_n}(\phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \phi)} d\omega(\phi). \end{aligned}$$

On va maintenant déduire la représentation intégrale de V de celle de u . L'idée est utiliser la fonction cotangente pour faire le changement de variable. Il faut d'abord enlever les deux extrémités 0 et 2π de l'intervalle. On définit $\alpha = \omega(\{0\} \cup \{2\pi\}) \geq 0$ et ω' obtenu de ω en omettant ces deux points. On voit donc

$$u(r \exp(i\theta)) = \alpha \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta)} + \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \phi)} d\omega'(\phi).$$

A partir de u , la fonction V est donnée par $w \mapsto u(z(w))$. En écrivant $w = \xi + i\eta$, on a

$$z(w) = \frac{\xi + (\eta - 1)i}{\xi + (\eta + 1)i} \text{ et } |1 - z(w)|^2 = \frac{4}{\xi^2 + (\eta + 1)^2}$$

et

$$|\exp(i\phi) - z(w)|^2 = \frac{4((\cot(\phi/2) + \xi)^2 + \eta^2)}{(\xi^2 + (\eta + 1)^2)(1 + \cot^2(\phi/2))},$$

d'où

$$\begin{aligned} V(\xi, \eta) &= \alpha \frac{1 - |z(\xi + i\eta)|^2}{|1 - z(\xi + i\eta)|^2} + \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z(\xi + i\eta)|^2}{|1 - z(\xi + i\eta) \exp(-i\phi)|^2} d\omega'(\phi) \\ &= \alpha \eta + \int_0^{2\pi} \frac{\eta(1 + \cot^2(\phi/2)) d\omega'(\phi)}{(\cot(\phi/2) + \xi)^2 + \eta^2} \end{aligned}$$

On fait alors un changement de variable $\lambda = -\cot(\phi/2)$ et on note $d\nu(\lambda) := d\omega'(\phi)$, d'où la masse totale de ν est finie. En définissant $d\mu(\lambda) = (1 + \lambda^2)d\nu(\lambda)$, on conclut finalement que V peut être représentée par cette intégrale, ainsi φ peut l'être puisqu'on a donné au tout début la méthode de construction de la représentation intégrale de φ à partir de celle de V .

Unicité Pour montrer que ce type de représentation intégrale est unique, il faut montrer que α , β et μ sont uniquement déterminés par φ . Par un calcul immédiat $\beta = \operatorname{Re} \varphi(i)$ (il suffit de voir que l'intégrande en $z = i$ est imaginaire pur). On calcule ensuite

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(i\eta)}{i\eta} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \alpha + \frac{\beta}{i\eta} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^2 + 1 + i \cdot \lambda(\eta - 1/\eta)}{\lambda^2 + \eta^2} d\nu(\lambda),$$

où $d\nu(\lambda) := d\mu(\lambda)/(1 + \lambda^2)$. On utilise implicitement que cette fonction est dans $L^1(\mathbb{R}, \mu)$. La fonction sous l'intégrale tend vers 0. De plus, pour $\eta > 1$ et $\lambda \neq 0$

$$\left| \frac{\lambda^2 + 1 + i\lambda(\eta - 1/\eta)}{\lambda^2 + \eta^2} \right| \leq 1 + \left| \frac{\lambda(\eta - 1/\eta)}{\lambda^2 + \eta^2} \right| \leq 1 + \frac{|\lambda(\eta - 1/\eta)|}{2|\lambda\eta|} \leq 1 + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{\eta^2} \right| \leq 2.$$

L'inégalité est aussi valable si $\lambda = 0$ où l'on utilise successivement l'inégalité triangulaire et arithmético-géométrique. On domine donc l'intégrale par une fonction intégrable par rapport à μ . Par le théorème de convergence dominée, on obtient $\alpha = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \varphi(i\eta)/(i\eta)$.

Il reste à montrer que μ est uniquement déterminée par φ . Pour ce faire, montrons que pour $a < b$ deux réels, on a

$$\frac{\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})}{2} + \mu(]a; b]) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b V(x + i\eta) dx \quad (\star)$$

On suppose premièrement que μ est finie. On calcule alors

$$\int_a^b V(x + i\eta) dx = \int_a^b \left(\alpha\eta + \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta d\mu(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + \eta^2} \right) dx = \alpha\eta(b - a) + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b \frac{\eta dx}{(\lambda - x)^2 + \eta^2} \right) d\mu(\lambda).$$

En faisant un changement de variable $y = (x - \lambda)/\eta$, on voit ainsi que

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b V(x + i\eta) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\arctan \frac{b - \lambda}{\eta} - \arctan \frac{a - \lambda}{\eta} \right) d\mu(\lambda) + \frac{\alpha\eta(b - a)}{\pi},$$

où la fonction sous l'intégrale tend vers $\pi \mathbb{1}_{]a; b]} + \pi/2(\mathbb{1}_a + \mathbb{1}_b)$ lorsque $\eta \rightarrow 0$. Comme toute fonction constante est ici intégrable, par le théorème de convergence dominée, le premier terme tend vers $(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}))/2 + \mu(]a; b])$, et le dernier terme tend vers 0.

Si μ n'est plus finie, on sépare V en $V_1 + V_2$ où

$$0 \leq V_2(x + i\eta) = \int_{|\lambda| > N} \frac{\eta d\mu(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + \eta^2} \leq \eta \left(\int_{\lambda < -N} \frac{d\mu}{(\lambda - a)^2} + \int_{\lambda > N} \frac{d\mu}{(\lambda - b)^2} \right) \leq C\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

où N est assez grand tel que $]a - 1; b + 1[\subset [-N; N]$. L'intégrale dans V_1 est à support fini et on voit que pour η qui tend vers 0

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b V(x + i\eta) dx &= \frac{1}{\pi} \int_a^b V_1(x + i\eta) + V_2(x + i\eta) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\alpha\eta + \int_{-N}^N \frac{\eta d\mu(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + \eta^2} \right) dx + O(\eta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \left(\arctan \frac{b - \lambda}{\eta} - \arctan \frac{a - \lambda}{\eta} \right) d\mu(\lambda) + O(\eta) \\ &\rightarrow \frac{\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})}{2} + \mu(]a; b]), \end{aligned}$$

en utilisant $]a - 1; b + 1[\subset [-N; N]$. Ainsi, on a prouvé (\star) .

Il nous reste à montrer que la formule (\star) détermine uniquement μ . Comme une mesure borélienne est uniquement déterminée par ses valeurs sur des intervalles, il suffit ici de donner la mesure d'un singleton par la formule (\star) . Or,

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})}{2} + \mu(]a; b]) = \lim_{b \rightarrow a^+} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]a; b[} + \frac{\mathbb{1}_a + \mathbb{1}_b}{2} d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_a d\mu = \mu(\{a\}),$$

où l'on a utilisé le théorème de convergence dominée avec la fonction de domination $\mathbb{1}_{]a, a+1[}$. \square

Inspiré par la démonstration de l'unicité, on introduit un lemme pour identifier $P(a, b)$.

Lemme 5.1.10. *Une fonction $\varphi \in P$ est dans $P(a, b)$ si et seulement si la mesure correspondante est nulle sur $]a; b[$.*

Démonstration. \Rightarrow Si φ peut se prolonger continûment en passant par $]a; b[$ par réflexion, alors pour tout compact $[c; d] \subset]a; b[$, on sait que $V(x + i\eta)$ tend vers $V(x)$ uniformément lorsque $\eta \rightarrow 0$ car V est continue sur un compact $[c; d] \times [-1; 1]$ donc uniformément continue, d'où

$$\frac{\mu(\{c\}) + \mu(\{d\})}{2} + \mu(]c; d]) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_c^d V(x + i\eta) dx = \frac{1}{\pi} \int_c^d V(x) dx.$$

Par construction, la partie imaginaire V est identiquement nulle sur $]a; b[$. Ainsi $\mu(]c; d]) = 0$ pour tous c, d finis, d'où $\mu(]a; b]) = 0$.

\Leftarrow On reprend la formule de représentation

$$\varphi(z) = \alpha z + \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda) = \alpha z + \beta + \int_{\lambda \notin]a; b[} \frac{\lambda z + 1}{\lambda - z} \frac{d\mu(\lambda)}{1 + \lambda^2}.$$

Avec $z \in \mathcal{H}_+ \cup]a; b[$ fixé, la fonction sous l'intégrale est bornée sur $] - \infty; a] \cup [b; +\infty[$ car $\lambda \mapsto \frac{1}{1 + \lambda^2}$ est intégrable par rapport à μ . La formule prolonge donc φ à $\mathcal{H}_+ \cup]a; b[$. De plus, les valeurs de φ sur $]a; b[$ sont réelles. Ceci nous permet de conclure que φ admet un prolongement par réflexion de Schwarz passant l'intervalle $]a; b[$. \square

5.2 PREUVE DU DEUXIÈME THÉORÈME DE LOEWNER

Nous démontrons ici le deuxième théorème de Loewner 1.2.4.

Un sens est relativement aisée grâce à la représentation intégrale des fonctions de Pick. L'autre sens se démontre en deux étapes. D'abord, on montre que $f \in P_\infty(a, b)$ est analytique à l'aide du petit théorème de Bernstein démontré en annexe. On montre ensuite que f est bien dans $P(a, b)$ en utilisant le théorème des moments de Hamburger (dont on pourra consulter la preuve dans [PdM], théorème 2, p. 17).

Théorème 5.2.1 (théorème des moments de Hamburger). Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les matrices $(c_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ sont positives pour tout n . Il existe alors une mesure de Radon positive ν sur \mathbb{R} telle que $c_k = \int \lambda^k d\nu(\lambda)$ pour tout k .

Remarque 5.2.2. Dans la preuve du deuxième théorème de Loewner, nous utilisons seulement que ν est localement finie (i.e. la mesure d'un compact est finie) et positive. Nous n'avons pas besoin de toutes les propriétés d'une mesure de Radon.

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 5.2.3. Soit g une fonction sur $] -1; +\infty[$ de classe \mathcal{C}^3 positive, convexe et décroissante telle que g'' est convexe. Alors g'' est décroissante.

Démonstration. Soit g une telle fonction. Supposons qu'il existe $x \in] -1; +\infty[$, tel que $g'''(x) > 0$. Par convexité de g'' , g''' est croissante et donc pour $y \in]x; +\infty[$, $g'''(y) > 0$. Donc g'' est croissante sur cet intervalle. Il existe alors M' et $c > 0$ tel que $g'''(x) > c > 0$ pour $x \in]M'; +\infty[$. On a alors en intégrant $g''(x) > c(x - M') + g''(M') > 0$ sur $]M'; +\infty[$. Ainsi il existe $M'' > 0$ tel que $g''(x) > c > 0$ pour $x \in]M''; +\infty[$. En intégrant une seconde fois, on a, sur cet intervalle, $g'(x) \geq c(x - M') + g'(M'')$ et ainsi, il existe y_0 tel que pour $y > y_0$, $g'(y) > 0$, ce qui contredit la décroissance supposée de g .

Ainsi, g'' est décroissante. □

Avec la notation introduite par la définition 5.1.5, le deuxième théorème de Loewner 1.2.4 se reformule ainsi :

Reformulation (Deuxième théorème de Loewner 1.2.4). Pour f une fonction de $]a; b[$ dans \mathbb{R} , $f \in P(a, b)$ si et seulement si $f \in P_\infty(a, b)$.

Démonstration théorème 1.2.4. $\boxed{\Leftarrow}$ Commençons par le sens réciproque. Soit $f \in P(a, b)$. Les résultats 5.1.7 et 5.1.10 nous donnent une représentation intégrale de f . Par la caractérisation des fonctions homographiques qui préservent l'ordre de Loewner, l'intégrande est dans tous les $P_n(a, b)$. Donc f est aussi dans tous les $P_n(a, b)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons maintenant le sens direct. Soient $f \in P_\infty(a, b)$. On suppose d'abord f bornée et a, b réels.

Ramenons-nous au cas où $]a; b[=] -1; +\infty[$. On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$,

$$A(z) = \frac{b - a}{a - z}.$$

On vérifie facilement que A envoie l'intervalle $]a; b[$ sur $] -1; +\infty[$. Il est également facile de voir que A est un élément de $P(a, b)$ car $A(\mathcal{H}_+) \subset \mathcal{H}_+$ et $\forall z \in \mathcal{H}_+$, $\overline{A(z)} = A(\bar{z})$. La fonction réciproque $A^{-1}(t) = a - \frac{b-a}{t}$ l'est donc aussi. Si l'on montre que $f \circ A \in P(-1, +\infty)$ alors $(f \circ A) \circ A^{-1} = f$ est dans $P(a, b)$ (car $P(a, b)$ est stable par composition). On est donc bien

ramené au cas où $]a; b[=] - 1; +\infty[$.

Par le sens direct du premier théorème de Loewner, f est de classe \mathcal{C}^{2n-3} sur $] - 1; +\infty[$ et convexe, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en particulier, f est de classe \mathcal{C}^∞).

De plus, comme f est bornée (par hypothèse) et f' est positive, alors f' tend vers 0 en $+\infty$ (autrement, on aurait, à partir d'une certaine valeur, f' strictement supérieure à une constante strictement positive et alors f divergerait). De plus f' est convexe donc on a forcément que f' est décroissante, car si f'' est positive en un point x alors f' est croissante à partir de x par la convexité, donc $f'(y) \geq f'(x) > 0$ pour $y > x$ et f' ne peut pas tendre vers 0.

Montrons maintenant que f' est complètement monotone (définition 6.1.1 en annexe), c'est à dire que $(-1)^n (f')^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $g = f'$. On a montré juste précédemment que $f^{(2n-3)} = g^{(2n-2)}$ est convexe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, les dérivées paires de g et g sont toutes positives. Par le lemme 5.2.3 démontré en début de sous-partie, les dérivées paires de g sont décroissantes. Ainsi, les dérivées impaires de g sont négatives. Finalement, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n g^{(n)} \geq 0$$

Autrement dit, g est complètement monotone. Ainsi, quitte à composer par la translation $x \mapsto x + 1$, par le théorème de Bernstein 6.1.3 prouvé en annexe, $g = f'$ admet un prolongement analytique sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$. Finalement, f en admet également un en intégrant celui de g .

Fixons $x \in] - 1; \infty[$. On peut développer f en x , en écrivant :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - x) + a_2(z - x)^2 + \dots$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - x| < |x - (-1)| = x + 1$. Comme f est dans $P_n(a, b)$, on a vu que $M_n(x, f) = (a_{i+j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \geq 0$ et, f étant de classe \mathcal{C}^∞ , $x \mapsto M_n(x, f)$ est une application continue et est donc positive partout. D'après le théorème des moments de Hamburger (5.2.1), il existe une mesure de Radon positive $d\nu$ sur \mathbb{R} telle que $a_k = \int \lambda^{k-1} d\nu(\lambda)$ pour tout $k \geq 1$. $f(z)$ s'écrit alors :

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int \lambda^{k-1} d\nu(\lambda) (z - x)^k, \quad (*)$$

où notons $r := 1 + x$ le rayon de convergence de la série précédente. Par la formule de Cauchy-Hadamard, on a :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} = 1/r \quad (**)$$

On va démontrer que cela implique que $\operatorname{supp} \nu \subset [-\frac{1}{r}; \frac{1}{r}]$. Autrement, il existerait $\varepsilon, m > 0$ tels que

$$d\nu \left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{r} - \varepsilon; \frac{1}{r} + \varepsilon \right] \right) \geq m.$$

Mais cela implique que $\int \lambda^{2k} d\nu(\lambda) \geq m(\frac{1}{r} + \varepsilon)^{2k}$, i.e. $\limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} \geq \frac{1}{r} + \varepsilon$ qui contredit (**). On obtient l'estimation

$$\int |\lambda|^k d\nu(\lambda) \leq d\nu\left(\left[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right]\right) \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^k.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue, on peut donc intervertir somme et intégrale puis sommer la série géométrique dans (*) pour obtenir l'écriture

$$f(z) = a_0 + \int \frac{z-x}{1-\lambda(z-x)} d\nu(\lambda),$$

où le terme à droite est bien défini sur $\mathcal{H}_+ \cup]-1; 2x-1[$.

Comme la fonction $z \mapsto \frac{z-x}{1-\lambda(z-x)}$ est dans la classe P , on conclut que $f \in P(-1, 2x-1)$ pour tout $x > -1$, i.e. $f \in P(-1, +\infty)$.

Si f n'est pas bornée sur $]a; b[$ ou que a ou b est infini, on raisonne sur l'intervalle $[c; d] \subset]a; b[$ et par ce qui précède $f \in P(c, d)$. Puisque $[c; d]$ est arbitrairement grand inclus dans $]a; b[$, on en déduit que $f \in P(a, b)$.

□

6 ANNEXE

6.1 THÉORÈME DE BERNSTEIN

Après avoir introduit la notion de fonction complètement monotone, on montre un lemme technique avant de démontrer le théorème de Bernstein, utilisé dans la preuve du deuxième théorème de Loewner 1.2.4.

Définition 6.1.1 (Fonctions complètement monotones). *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . On dit que f est complètement monotone si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n f^{(n)} \geq 0.$$

Lemme 6.1.2. *Soit f complètement monotone et $n \in \mathbb{N}$. Alors $|f^{(n)}|$ est une fonction décroissante.*

Démonstration. Si n est pair, on écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Par complète monotonie, $(-1)^{(2k+1)} f^{(2k+1)} \geq 0$ d'où $f^{(2k+1)} \leq 0$, d'où $f^{(2k)}$ décroissante. Par complète monotonie (CM), on a aussi $(-1)^{(2k)} f^{(2k)} \geq 0$ soit $f^{(2k)} \geq 0$. Ainsi, $|f^{(2k)}|$ est décroissante.

Si n est impair, on écrit $n = 2k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Par CM, $(-1)^{(2k)} f^{(2k)} \geq 0$ d'où $f^{(2k)} \leq 0$, d'où $f^{(2k-1)}$ croissante. Par CM, on a aussi $(-1)^{(2k-1)} f^{(2k-1)} \geq 0$ soit $f^{(2k-1)} \leq 0$. Ainsi, $|f^{(2k-1)}|$ est décroissante. □

Théorème 6.1.3 (théorème de Bernstein). *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction complètement monotone. Alors f est la restriction au demi-plan $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ d'une fonction analytique.*

Démonstration. La preuve se décompose en deux étapes. On montre d'abord que la série de Taylor de f converge sur H . Puis on montre que cette série de Taylor coïncide avec f sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $b > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $z \in H$,

$$S_{N,b}(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n.$$

Cherchons d'abord à montrer que $S_{N,b}(x)$ a une limite en N pour $x \in]0; b[$. Par la formule de Taylor-Lagrange, pour $x \in]0; b[$, il existe ξ_x tel que

$$f(x) - S_{N,b}(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} (x-b)^{N+1}.$$

Par complète monotonie (CM), les termes de $S_{N,b}(x)$ sont positifs (car $(x - b) < 0$). Et, par le même argument, le terme de droite de l'équation précédente est aussi positif.

Ainsi, en écrivant

$$f(x) = S_{N,b}(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}(x-b)^{N+1}$$

on voit que si $S_{N,b}(x)$ est non borné en N (donc tend vers $+\infty$ comme somme de termes positifs), on a $f(x)$ non bornée quand N tend vers $+\infty$, ce qui est absurde car ce terme est fini (et constant en N).

Ainsi, $S_{N,b}(x)$ est convergente en N comme somme de termes positifs bornée. Par positivité des termes, on a donc également une convergence absolue.

Soit maintenant z un complexe de la boule $B(b, b)$. On a

$$\sum_{n=0}^N \left| \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n \right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{|f^{(n)}(b)|}{n!} |z-b|^n.$$

En posant $r = |z-b|$, on a $0 < r < b$. Ainsi, le membre de droite converge par convergence absolue de $S_{N,b}(r)$. Ainsi, $(S_{N,b}(z))_N$ converge absolument donc converge. On note $S_b(z)$ sa limite. Finalement, S_b est analytique sur la boule $B(b, b)$ pour $b > 0$.

Montrons maintenant que S_b coïncide avec f sur $] \frac{3b}{4}; b[$, c'est-à-dire $S_{N,b}(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x)$.

Soit $x \in] \frac{3b}{4}; b[$. On a donc $\frac{b}{2} \leq \xi_x$. Par positivité des termes, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - S_{N,b}(x) &= \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} (x-b)^{N+1} \right| \\ &= \frac{1}{(N+1)!} |f^{(N+1)}(\xi_x)| |x-b|^{N+1} \\ &\leq \frac{1}{(N+1)!} \left| f^{(N+1)}\left(\frac{b}{2}\right) \right| \left(\frac{b}{4}\right)^{N+1}. \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

La dernière inégalité s'obtenant par le lemme précédent.

On remarque alors que le développement en série de Taylor de f par rapport au point $\frac{b}{2}$, s'écrit :

$$\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}\left(\frac{b}{2}\right)}{n!} \left(x - \frac{b}{2}\right)^n.$$

On a prouvé précédemment que ce développement converge en N pour $x \in]0; \frac{b}{2}[$, et donc en particulier pour $x = \frac{b}{4}$. Ainsi, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{b}{2}\right)}{n!} \left(\frac{b}{4}\right)^n$$

est convergente. Le terme général converge donc vers 0. Ainsi

$$\left| \frac{f^{(n)}\left(\frac{b}{2}\right)}{n!} \left(\frac{b}{4}\right)^n \right| \rightarrow 0.$$

En revenant à la majoration (\clubsuit), on obtient donc $S_{N,b}(x) \rightarrow f(x)$ (étant donné que $f(x) - S_{N,b}(x)$ est positif), pour tout $x \in]\frac{3b}{4}; b[$ et pour $b > 0$ arbitraire. On a donc obtenu que S_b et f coïncident sur tout l'intervalle $] \frac{3b}{4}; b[$ pour $b > 0$.

Montrons que toutes les S_b sont en fait égales. Pour $c > 0$, on note $c' = \frac{7c}{8}$, le milieu de l'intervalle $] \frac{3c}{4}; c[$ et $r_c = \frac{c}{8}$ son rayon. Soit $0 < b < b'$. On a

$$[b; b'] \subset \bigcup_{c \in [b; b']}]c' - r_c; c + r_c[$$

et par compacité il existe $c_1 < \dots < c_p$ tels que

$$[b; b'] \subset \bigcup_{i=1}^p]c'_i - r_{c_i}; c'_i + r_{c_i}[.$$

Cette union recouvrant $[b; b']$, on a nécessairement pour $0 \leq i \leq p-1$, $]c'_i - r_{c_i}; c'_i + r_{c_i}[\cap]c'_{i+1} - r_{c_{i+1}}; c'_{i+1} + r_{c_{i+1}}[$ ouvert. Ainsi, par unicité du prolongement analytique, $S_{c_i} = S_{c_{i+1}}$. Ainsi, $S_{c_1} = S_{c_n}$. Comme $] \frac{3b'}{4}; b'[\cap]c'_i - r_{c_i}; c'_i + r_{c_i}[$ et $] \frac{3b}{4}; b[\cap]c'_i - r_{c_i}; c'_i + r_{c_i}[$ sont des ouverts, $S_b = S_{c_1}$ et $S_{b'} = S_{c_n}$. Ainsi, $S_b = S_{b'}$. Finalement, on pose $S = S_b$. La fonction S est analytique sur toute boule $B(b, b)$ pour $b > 0$ et donc sur H . De plus, S coïncide avec f sur tous les intervalles $] \frac{3b}{4}; b[$ pour $b > 0$ et donc sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, f est bien la restriction à H d'une fonction analytique. Cette fonction est donnée par S . \square

RÉFÉRENCES

- [AnaWZ] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund, *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis, Second Edition*, CRC Press, 2015.
- [BaMa] Rajendra Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer, 1997.
- [BaPo] Rajendra Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton Series, 2007.
- [CoBV] Jonathan M. Borwein and Jon D. Vanderwerff, *On second derivatives of convex functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [CPM] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [Dob] O. Dobsch, *Matrixfunktionen beschränkter Schwankung* Math. Z. 43, 353-388, 1937.
- [DoMa] William F. Donoghue, Jr., *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Springer-Verlag, 1974.
- [DuCo] R. M. Dudley, *On second derivatives of convex functions*, Mathematica Scandinavica, 1977.
- [HeiMa] Otte Heinävaara, *Matrix monotone functions*, University of Helsinki, 2018.
- [Loe1] C. Loewner, *On generation of monotonic transformations of higher order by infinitesimal transformations* J. Analyse Math. 11, 189-206, 1963.
- [Loe2] C. Loewner, *On Schlicht-Monotonic Functions of Higher Order* J. Math. Anal. Appl. 14, 320-325, 1966.
- [PdM] Mathieu Delamare, *Travail Encadré de Recherche : problème des moments* Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes, 2011.